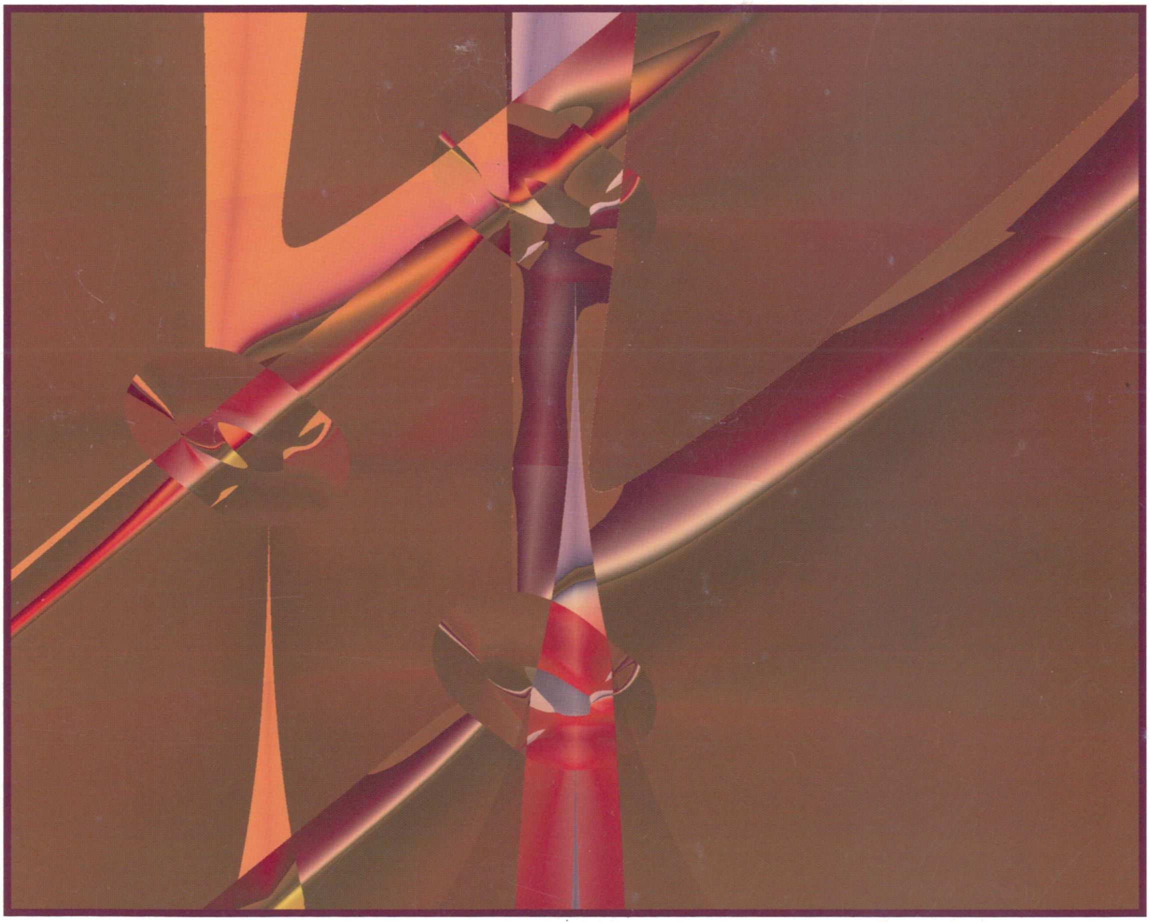
昭和38年7月2日第3種郵便物認可
2008年10月1日発行　第46巻10号　毎月1回1日発行
ISSN 0386—2240

数理科学

10
2008

特集　ポアンカレ
知の巨人が放った創造性の至宝



No.544

サイエンス社

MATHEMATICAL SCIENCES
Number 544 October 2008

ポアンカレ

知の巨人が放った創造性の至宝

表紙：戸川　隼人

お得な定期購読をおすすめします

毎号確実に御手元へ

地域によって書店店頭に陳列されない場合があります．**郵送料小社負担**にて確実に御手元へ届く定期予約購読をおすすめします．

予約購読は 1 年間（本誌のみ）11,000 円，1 年間（本誌＋別冊 2 冊）14,500 円，半年間（本誌のみ）5,500 円，半年間（本誌＋別冊 1 冊）7,250 円です．（税込み価格）

造本コストは更に上昇気味です．小社としてもあらゆる努力をもって廉価で提供してゆきたいと思っておりますが，定価改定の止むなき事態がかんがえられます．この場合予約購読期間中のものにつきましては料金据置きとなります．なお，臨時別冊のご注文については，本誌予約購読者の方には，商品到着後のお支払いにて承ります．

お申し込みは本誌とじ込みの振替用紙を御利用下さい．

数理科学特集一覧

63 年/7～2005 年/9 省略
2005 年/10 不確定性原理の新展開
別冊　スーパーストリング
/11 0 の発見
/12 現代代数学への誘い
2006 年/1 偶然から必然へ
/2 物理法則の直観的理解
/3 〈強い力〉
/4 「空間」とは何か
別冊　量子の新世紀
/5 数学と物理の対話
/6 発見とひらめき
/7 重力は語る
/8 ネットワーク科学の数理
/9 ランダムネス
/10 ツイスター理論の拡がり
別冊　場の量子論の拡がり
/11 固有値問題のひろがり
/12 素粒子像の探究
2007 年/1 ヤング図形で遊ぶ物理と数学
/2 ランダム行列の広がり
/3 現代物理における超対称性
/4 現代数学はいかに使われているか［代数編］
別冊　双対性の世界
/5 数学の直観的理解
/6 物理における位相の世界
/7 代数的物理観
/8 数学における場の量子論
/9 ディラック
/10 フーリエ解析の力
別冊　素粒子物理学の発展
/11〈電弱統一理論〉
/12「時空」への問いかけ
2008 年/1 現象を視る
/2 ゲージ重力対応
/3 現代物理のための数学キーワード
/4 現代数学はいかに使われているか［解析編］
別冊　多様体の広がり
/5 物理と数学の難所
/6 線形代数の力
/7 物理的思考法のすすめ
/8 数の魅力
/9 トポロジカルな弦の世界

数理科学臨時別冊一覧

07 年/11 コンピュータ将棋の頭脳
07 年/12 計算神経科学への招待
08 年/1 演習 くり込み群
08 年/3 熱方程式で学ぶ逆問題
08 年/5 重力理論講義
08 年/6 代数幾何入門講義
08 年/7 ネットワーク科学への招待
08 年/9 物理のためのリー群とリー代数

「数理科学」のバックナンバーは下記の書店・生協の自然科学書売場で特別販売しております

紀伊國屋書店本店（新宿）
紀伊國屋書店新宿南店
あおい書店中野本店
オリオン書房ノルテ店（立川）
くまざわ書店本店（八王子）
くまざわ書店桜ヶ丘店（多摩）
書泉グランデ（神田）
書泉ブックタワー（秋葉原）
三省堂本店（神田）
ブックファースト渋谷店
リブロ池袋店
ジュンク堂書店（池袋）
ジュンク堂書店（新宿）
芳林堂（高田馬場）
八重洲ブックセンター（東京駅前）
丸善丸の内本店（東京駅前）
ブックファースト青葉台店（横浜）
栄松堂ジョイナス店（横浜）
有隣堂イセザキ町店（横浜）
有隣堂西口・東口（横浜）
有隣堂厚木店（厚木）
文教堂ブックセンター（川崎）
旭屋船橋店
戸田書店静岡本店
ジュンク堂大阪本店
紀伊國屋書店梅田店（大阪）
旭屋本店（大阪）
アバンティブックセンター（京都）
ジュンク堂書店（京都）
ジュンク堂書店（神戸）
ジュンク堂三宮駅前店（神戸）
ジュンク堂書店（大分）
喜久屋書店倉敷店
紀伊國屋書店松山店
紀伊國屋書店福岡店
紀伊國屋書店福岡本店
ジュンク堂福岡店
紀伊國屋書店新潟店
旭屋札幌店
金港堂（仙台）
金港堂パーク店（仙台）
ジュンク堂書店（仙台）
鹿島ブックセンター（いわき）
友朋堂（つくば）

——大学生協・売店——

東京大学 本郷・駒場
東京工業大学 大岡山・長津田
東京理科大学 新宿
早稲田大学 理工学部
慶応義塾大学 矢上台
電気通信大学・福井大学
筑波大学 大学会館書籍部 第一学群書籍部
埼玉大学
名古屋工業大学・愛知教育大学
大阪大学・神戸大学 ランス
京都大学・九州工業大学
東北大学 理薬・工学
室蘭工業大学
徳島大学 常三島
愛媛大学 城北
山形大学 小白川
島根大学
学習院大学 成文堂
北海道大学 クラーク店

October 2008 MATHEMATICAL SCIENCES Number 544

特集／ポアンカレ

ポアンカレの水晶玉

序に代えて

小島 定吉

Hilbert が1900年にパリで開催された第2回国際数学者会議（ICM）で23の問題を提示したのは有名な話である．ところで，Poincaré は1908年にローマで開催された第4回 ICM の一般セッションで，「The Future of Mathematics」と題する論文を発表している．何らかの事情で講演自体は Darboux が行ったようだが，今日ではフランス語の原典*1) および2つの英語訳*2)*3) がウェブ上で閲覧可能である．こうした事実と文献は，私はたまたま手にしたアメリカ数学会の雑誌『Notices』の2008年4月号に掲載された Davis と Mumford による Henri's Crystal Ball（Henri は Poincaré の名）と題する記事*4) で知った．

原典や記事の内容の詳細については直接ご覧いただくとして，印象的だった事柄を一つ取り上げたい．それは数学における言葉作りの重要性についてである．Poincaré は正しい言葉作りが科学の効果的（原著訳では economic という単語が使われている）促進の源泉になると論文中に記している．そして具体的に，当時すでに市民権を得ていた収束（convergence）に加え，群（group），不変量（invariant），同型（isomorphic）．変換（transformation）を例として取り上げている．今日でこそ当たり前なこれらの術語の重要性を，100年前の時点で指摘した慧眼には正に脱帽である．

ところで，Crystal Ball とは水晶玉のことである．そう，占い師が客との間に置くあの大きくてまんまるの向こうが透けて見える玉である．占いの的中率は水晶玉で決まる．ディズニー映画では，深い透明度をもついかにも硬質の水晶玉は，手をかざすとその中に将来を映し出す．それを見て占い師は，客の顔を見ながら厳かに「あなたは未来は…」と語り始める．信じるか否かは本人次第．一国の首長が重大な決断をするたびに頼るよく当たる水晶玉もあるらしい．

さて，『Notices』の記事は，Poincaré の水晶玉に映し出された数学の将来を100年を経た今日の数学の現状と比較するスコアボードで締めくくられている．本特集は，この知の巨人の数学・物理学・天文学・哲学に広がる偉大な業績とその後の進展を，8編の記事とコラム＋インタビューで記し，今日の科学がいかに大きな影響を受けているかを紹介する．それにしても Poincaré が覗き込んだ水晶玉は紛れもなく超国宝級で，どこかで売っていれば，ぜひ買い求めたいものだ．

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

*1） http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k17083c/f934n10.capture

*2） http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk/Extras/Poincare_Future.html

*3） http://portail.mathdoc.fr/BIBLIOS/PDF/Poincare.pdf

*4） http://www.ams.org/notices/200804/tx080400458p.pdf

ポアンカレの哲学



吉田　夏彦

1. はじめに

ポアンカレの哲学的な考え方は，数学や科学の専門家ではない人にも読めるようにと書いた文章を集めた，四部作，LA SCIENCE ET L'HYPOTHÈSE『科学と仮説』1902，LA VALEUR DE LA SCIENCE『科学の価値』1905，SCIENCE ET MÉTHODE『科学と方法』1908，DERNIÈRES PENSÉES『晩年の思想』1913からうかがうことができる．四冊とも，『 』に入れた名前で訳が岩波文庫におさめられている．原書，訳本ともに新本の入手は必ずしもたやすくないものもあるかも知れないが，図書館でみることができるであろう．

一般向けに書かれたといっても，当時の科学のさまざまな理論についての，かなり突っ込んだ紹介と検討とがふくまれている．その部分に即して細かくみて行くのが，ポアンカレの主張を忠実に理解することにつながるであろう．また，当時の科学，数学，論理学，哲学が，この碩学とその論敵とにどのようにみえていたかを知るてがかりとなるという意味でも興味深い部分である．しかし，こういったところに立ち入ることは紙数が許さないと思われるので，ここでは，ごく大づかみにポアンカレの哲学的な傾向についてのべるにとどめる．

2. 規約主義

死後に魂が行く世界のようなものを信じている人には，時空のなかにはないことがらもあると思っている人もいるかも知れないが，生きている間の，世の中のさまざまな出来事が，空間の中で，時間上の経過をたどりながら生ずることはみとめるであろう．死後の世界をみとめない人も，生きている間の出来事が時空の中で生ずることには，異存がないであろう．さらに生まれる以前にも，かなり長年月の間，時間と空間とを舞台とする宇宙が存在していたこと，死後にもかなりの長年月存在し続けると思っているであろう．そうして，この宇宙の時空には一定の構造があると考えているであろう．

では，この構造は，具体的にいってどんなものか．かつては，無限の過去から無限の未来に向って時間が流れていると思っている人も多かったようであるが，一方宗教的な信仰にもとづいて，時間の始と終があるとしている人が現在でも少からずいる．空間も，無限のひろがりを持つユークリッド空間であるとする考え方が，かなりながいこと行われていたようであるが，一般相対性理論の登場以来，時空が四次元のロレンツ多様体であるとする考え方の方が，自然科学者の間では，共通の考え方になって来たようである．時空がこの種の多様体であると宣言するだけでは，宇宙の構造はきまらないが，観測されたデータとのかねあいで

提出されているモデルの中で，宇宙が時間的にも，空間的にも有限のものであるとするモデルが，現代においては有力である．

このように時空の構造について種々の考え方が行われていることは事実であるが，この事実を前にして，時空の構造は，どう考えてもいいのだとする相対主義者もいるであろう．しかし，この種の相対主義に同ぜず，宇宙の構造は客観的に一義的にきまっているはずで，考え方が種々にわかれているのは，人間の知識が不完全だからであるとする絶対主義者もいるであろう，

ポアンカレは，この二つの極端な考え方のどちらにもくみしない．時空の構造を表現する数学的な理論には，複数のものが可能であることをみとめる一方，どれをとるのが便利であるかという観点から，可能なものの中の一つが選ばれているのが実情であり，一旦選択が行われれば，選択が保持されている限り，時空の構造は，この理論により，決定される，とする．これが，ポアンカレの規約主義として有名な説である．『科学と仮説』の幾何学について論じたところでくわしく説明されているが，他の3冊でも折にふれて言及されている．

3. 公理と定義

一般相対性理論についてのアインシュタインの最初の論文が出た1915年にポアンカレはもう此の世の人ではなかった．だから，その規約主義は，宇宙論で時空の構造を示すものとして採用される数学的空間が，ユークリッド空間がロレンツ多様体に交代することを念頭において提唱されたものではない．

彼は，「世界の中の物体の大きさが同時に十倍になったとしても，我々は，それに気づかないであろう，なぜなら我々の肢体や感覚器官も，すべての計測器もみな一様に十倍の大きさになるので，大きさの変化を検出する手段がないからである」といった思考実験で，絶対空間の概念が科学において無意味であることを示す．また，ユークリッド幾何学の公理の正しさを実験によって示すことも，先天的な確実性を持つと主張することも不可能であると論じ，ライヴァルの幾何学，たとえばロバチェフスキー幾何学を空間についての理論として採用することも可能であるとする．同時に，三次元のユークリッド空間が人間にとって一番自然なものと考えられる理由を，人間の祖先が，外敵の攻撃に立ち向かうために，種々の感覚と積極的な動作との間に進化論的な過程をへてきずいてきたネットワークという概念をもちいて説明しようとする．

ユークリッド幾何学の公理に登場する点や線の概念に対応するものを使った実験がおこなわれることはないことが，ポアンカレが，この公理の正しさを実験的に示せないとする理由の一つである．たとえばひろがりがまったくない点や，幅がまったくない線は，みることも，紙の上に作図することもできないが，ユークリッドの『原論』の巻頭にある定義では，点や線は，正にそのようなものだとされているのである．みることができる点は，ひろがりがある．しかし，そのひろがりをどんどん小さくしていった極限としてひろがりのまったくない点を想像することはできるであろう．現実にみられる図形は，このような極限操作の結果として想像される幾何学上の図形に，多少ともあらい近似と考えられる．幾何学の定理が，経験される図形に近似的にあてはまる所以もここにあるとされるのである．

現代では，ユークリッド空間を，正定値なスカラー積が定義されているヴェクトル空間と定義する際に，ヴェクトルを，幅のない線分（の同値類）と表象することは必ずしも求められてはいない．たとえば閉区間の上の連続関数をヴェクトルとするユークリッド空間も考えられることは，線形代数の入門書などにも書かれている．要するに，ユークリッド空間の定義は，さまざまなモデルを許すので，何なら，経験的な空間の中にモデルを構成することも考えられよう．これが一例であるが，ポアンカレが規約主義の論拠としたことは，現代の人間には，強い印象を与えない場合もあるかも知れない．

しかし，このように自然科学で使われる数学的構造の定義が，種々のモデルを許し，また実際に種々のモデルが実用に供されるということこそ，規約主義のテーゼ自体は妥当なものであることを示しているといえるのではなかろうか．モデルが構成される局面がちがうのに応じて，構造の定義に登場する概念の解釈もかわる．しかしどの局面でも，そのモデルを使っている限り，その定義から演繹されることは，真理とされるのである．「幾何学の公理は，定義が変装したものに過ぎない」(『科学と仮説』第三章）という彼のいいぶんも，この状況によくあてはまるように思われる．

なお，可能な幾何学の中で便利なものがえらばれるという際に，ポアンカレは，自然科学の発展のために便利なものを考えているのであって，宗教上の信仰での便宜などということは考慮に入れていない．あくまで知的な見地でものごとを論じているのである．

4. 数学的帰納法

自然科学の真理が知られるのは，実験がきっかけになってのことが多い．たとえば地球上のある場所での実験により，物質Aと物質Bとが化合して物質Cになることがたしかめられたとする．実験が信頼できる研究者の手で注意深くおこなわれたことが知られ，更に別の場所での同じく信頼できる研究者の手による追試が同じ結果を得たという報告が数例あったとすると，AとBとが化合するとCとなることは，一般的な真理とされることになる．その結果，たとえば人間が到達できない程遠くにある天体Dでも，AとBとが同じ条件のもとで化合すればCが生ずると結論されるのである．

これはかぎられた数の実例をもとにして一般化に進む帰納の一例である．帰納には，不確実性がともなう．今例にあげた帰納でも，宇宙の普遍的な秩序を前提にしているが，この秩序が外界に存在するとするのは，信念であって，絶対に確実であるととるべき根拠はない．このことをポアンカレははっきりみとめているが，だからといって懐疑主義に傾くのではなく，自然科学が大筋において人間の知識の拡大に貢献していることを随所で承認している．これは，実在論者ではなかったこととつながるのであろう．この点については，後でのべる．

数学的帰納法も，特殊から一般に進む点で，自然科学でおこなわれる帰納に似ているが，ポアンカレの説によると，この帰納法には不確実性はともなわない．なぜなら，「これは，精神自体の性質の一つを確認したものにほかならないからである．」(『科学と仮説』第一章)

この「 」の中に引用した文の意味は，必ずしもわかりやすくはないが，ポアンカレはおそらく数学に，精神の創造物であるとみられる面があることをいいたかったのであろう．創造物であるといっても，気ままな空想の産物というわけではない．主張は，すべて厳密な論証によって根拠づけられなくてはならないが，その論証は，三段論法のように一般から特殊を演繹する推論だけでなりたっているのではない．数学では，むしろ特殊な例についての証明から一般論に進むかたちの論証が多いことにポアンカレは注意している．しかし，そういう論証も，注意深くおこなわれている場合には，一般から特殊を演繹する演繹にくらべて厳密性の点で劣ることはない．数学的帰納法は，そのような論証のいちじるしい例をなしているのである．数学的帰納法は，先天的総合判断であるというポアンカレの有名な表現も，このあたりの消息に由来するのであろう．

現代の公理的集合論では，順序数の定義を与えてから，自然数を順序数の一部として定義することが多い．そうして自然数全体の集合が，他の集合の元となりうる種類の集合であることを，無限公理として前提する．

順序数についての帰納法，自然数についての帰納法は，これらの定義から，その成立することが証明される．では，数学的帰納法は，ポアンカレの意見に反して，分析判断ととられるようになったというべきであろうか．

5. 先天的総合判断

集合の概念は，種類とか組とか呼ばれるかたちでは，古くから日常的に使われていた．この日常的な概念の用法を，自明と思われる公理と定義とにより体系化すれば，数学のさまざまな概念がその体系の中で定義でき，無限基数や順序数の計算も自然なかたちで定義できることを明らかにしたのが，十九世紀における集合論の誕生だったといえよう．しかし，誕生後間もなく，矛盾が内蔵されていることが発見されて，数学や論理学の基礎についての深刻な検討をしいることになった．ポアンカレ自身，この検討において貢献し，またこの検討に関する諸家の発言の批判をおこなったこともよく知られているところであろう．その後一世紀近くの年月がたち，その間に，数学基礎論の世界でもさまざまな成果がえられた．こういう成果に照らしながら，ポアンカレのこの方面の発言をふりかえることは興味深いことであろう．たとえば『晩年の思想』の第四章に，ツェルメロの公理的集合論についての必ずしも好意的ではない紹介があるが，当時の状況で，ツェルメロの論文を読めば，ポアンカレの感想に同ずる人も多かったのではないかと思われる．しかし，ここでは，こういった点には立入らない．

ただ，数学的帰納法の評価について次のことを注意しておこう．発見された矛盾は避けるようにし，数学の概念の定義に必要な存在公理を，なるべく自然なかたちで表現するように工夫された，いくつかの公理的集合論，特にツェルメロに由来しながら，ツェルメロの意図には多少そむいたかたちで形式化された，ZF + AC と呼ばれるものが，数学の成果を，わかりやすく体系化するのに適したものであるという考え方が，ブルバキの主張などをきっかけとして普及し，その線で書かれた教科書も多く出版されるようになった．この見地からすると，述語論理の推論の体系と集合論の公理とは，数学を創造して行くときの精神が，論証の上で必要としている道具一式を表現しているととることもできる．素朴集合論の時代の包括の

公理からは，ZF の存在公理は，系として出てくる．しかし，包括の公理を無制限に成立させてはならないことがわかっている現在では，これらの公理は根本前提であり，その意味では，先天的総合判断の位置にあるとみることもできる．数学的帰納法も，無限公理との関係で考えれば，この種の総合判断である．ポアンカレのいいぶんは，このようにすれば，現代でも評価できると思われるのである．

6. 真理の価値

数学の証明が，集合論の公理と定義とからの演繹，あるいは定義をさかのぼり，被定義概念を除去すれば，公理だけからの演繹とみなしうることは，今のべた通りである．ハードウェアの進歩により，メモリの量がふえ，演算速度が大きくなった現代の計算機を使えば，論理記号だけでこの演繹での推論の段階を一つももらさずに書上げることも可能であるということである．しかし，そのように書上げられた結果を逐一追う事は，人間には多大の忍耐を要することで，実用的には不可能であろう．自明な段階は，適当にとばし，自然言語と記号とを混用したもので書かれる証明の方が，人間の世界では通用し続けることであろう．

ところで，計算機が書いたものにせよ，人間が書いたものにせよ，公理（と定義）とからの演繹は，正しい推論の積み重ねであるかぎり，すべて数学の証明である資格を持っているが，この資格を持っているもののすべてが，価値のあるのではない．たとえば今まで記されたことのないほどの大きな桁数の自然数を二つ書出し，その和を，通常の手続きで計算した結果を，計算の過程とともに書けば，それは正しい証明であるが，こういう証明に価値をみとめる人は少いであろう．

ではどういう証明が価値のある証明なのか．自身，数学や自然科学の領域で多くの業績をあげて，専門家の尊敬を得ていたポアンカレは，数学者の美的な感覚を引き合いに出して，価値の問題を説明しようとする．さらに自然科学においても研究者をみちびくのは，自然の美，それも外的な感覚にうったえる美ではなく，純粋な知性がとらえる内面的な美であるという（『科学と方法』第一章）．この点を，数学や自然科学の門外漢にもわかりやすく説明しようとするところは，門外漢には多少とも抽象的な感じをまぬがれえないが，専門家には，思い当たるところが多いのではないかと推察される．

もちろん，彼は，科学が実用面に応用されて大きな効果をあげている場合のあることを否定しない．しかし，社会にとっての科学の存在意義を実用面だけにみようとする傾向には批判的で，「科学のための科学」（『科学の価値』第三部第十一章）を提唱したのである．

7. 現代的な意義

欧米には，実用面での効果とは独立に科学の研究意義があることを力説する科学者は，ポアンカレ以外にも多数いる．そういう科学者の中には，神が自然の中にそなえている美しい秩序を発見するのが，科学者の任務だとしている者もいる．そういう説によれば，科学によって発見される真理は，実在の中に存在しているものである．神の存在を否定する唯物論者の中にも，客観の中に実在する真理を発見することが，科学の任務だとしている者がいる．こういう人たちのことを，実在論者と呼ぶことにする．

ポアンカレが「客観的」という言葉で意味するのは，多くの精神に共通で言葉により互いに伝達可能なもののことである（『科学の価値』第十一章）．哲学者によっては，「間主観的」という言葉で指すものに近い．言葉がなければ伝達できないとする以上，感覚質のようなものは，ポアンカレのいう意味での客観的なものには入らない．しかし，感覚間の関係は，言葉で伝達可能なかぎり，客観的なものになる．ポアンカレは，客観的なものは，一般に，関係であって，質ではないという．

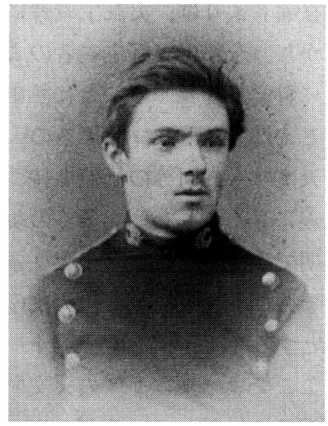
こういうところをみれば，彼は，科学を複数の主観の共同作業で構成される認識だとしているの

で，実在論者よりは，実証主義者に近いといえよう．しかし，一部の実証主義者のように，感覚的な現象に科学を還元することに熱中はしない．また，たとえば，プトレマイオスの天文学もニュートンの天文学も，同等の価値を持つとするような相対主義にもくみしない．多くの現象を共通の原理で説明できるニュートンの天文学の方が，それができないプトレマイオスの天文学より，すぐれているとする（『科学の価値』第十一章．ポアンカレは，ここでコペルニクスの天文学をプトレマイオスのものに対置しているが，ニュートンの名を出した方が適切であろう．）

ポアンカレは，相対性理論の建設の初期において貢献するところがあったといわれ，アインシュタインもそのことをみとめていたといわれるが，ポアンカレの方は，アインシュタインの特殊相対性理論における成果をあまり評価はしていなかったようである．上に述べたように，一般相対性理論のことは知らなかった．量子論のきっかけになったプランクの仕事のことは知っていたが，量子力学の完成のことはもちろん知らないで世を去ってる．しかし，このような新理論の登場で『科学革命の構造』（トーマッス・クーン）についての議論が盛んになった二十世紀すらすでに前世紀となった現代，以上のような大づかみでポアンカレの哲学的傾向をとらえてみれば，その傾向は現代においても至極穏当なもののように思われる．各論に立ち入り，当時の論敵のいい分も公平に調べた上での評価という点には立入らないということは，最初に断っておいたことであった．

（よしだ・なつひこ，東京工業大学名誉教授）

ポアンカレと保型形式



寺田　俊明

1. 初めに

保型関数は，代数・幾何・解析，さらには芸術までが関わる興味深い場です．まず，複素領域 D[*1] 上の保型形式について，大雑把に説明します．G が D の不連続群とは，基本領域と呼ばれる D の部分集合 R_0 が存在して，$R_j{=}g_j(R_0)$ によって D が重なることなく敷き詰められることです[*2]．D 上の有理型関数 $F(z)$ が正の整数 m とすべての $g_j(z)$ に対して

$$F(g_j(z)) = F(z)[g'_j(z)]^{-m} = F(z)(\gamma_j z + \delta_j)^{2m}$$

を満たすとき，G に関する重さ m の保型形式と言い，特に $m=0$，つまり，$F(z)$ が G で不変なとき，$F(z)$ を群 G に関する保型関数，特に $D=\mathbb{H}$ のときフックス関数と言います．

保型形式の例は，$D=\Delta$ とし，$H(z)$ を $|z|=1$ に極がない有理関数として，ポアンカレが導入したテータ・フックス級数

$$\Theta_H(z) = \sum_{i=0}^{\infty} H(g_j(z))[g'_j(z)]^m \qquad \text{(TH)}$$

です．この級数によって，保型関数が初めて組織的に研究できるようになりました．

2. 19 世紀末の保型関数

ポアンカレ時代に知られていた保型関数は次のようなものでした．

I. $D=\mathbb{P}$ で，G は巡回群，2 面体群，正多面体群のいずれか．

II. $D=\mathbb{C}$ なら，G が平行移動よりなり[*3]，R_0 は無限帯状領域で，保型関数は指数関数，三角関数など 1 重周期関数か，あるいは，G が 2 方向への平行移動[*3] よりなり，R_0 は平行四辺形で，保型関数はワイヤシュトラスのペー関数 $\wp(z)$ など 2 重周期関数，のどちらか．

III. モジュラ関数．$D=\mathbb{H}, G=SL(2,\mathbb{Z})$，$R_0$ は図 1 の太線で囲われた部分で，ケーリ変換で Δ に移してすべての R_j を表示すると図 2 となり，画家・版画家エッシャーの作品「収束する円」のヒントとなりました．保型関数の一つが $j(z)$ と表されています．

---

*1）叙述の簡素化と参照の便宜のため，よく用いる記号と用語をまとめます．$\mathbb{P},\mathbb{C},\mathbb{H},\Delta,X$ はそれぞれ z を変数とするリーマン球，複素平面，上半平面，単位円，実軸，D は $\mathbb{P}$ 上の領域，G は D に作用する分数 1 次変換の（不連続）群で，$G=\{g_j|j=0,1,2,\cdots\}$，

$$g_j = \begin{pmatrix} \alpha_j & \beta_j \\ \gamma_j & \delta_j \end{pmatrix},\ (\alpha_j,\beta_j,\gamma_j,\delta_j \in \mathbb{C},\ \det(g_j)=1)$$

添え字 j は単に高々可算個を意味します．群の作用は $g_j(z) = (\alpha_j z+\beta_j)/(\gamma_j z+\delta_j)$ で g_0 は単位行列，R_0 は G の基本領域で，円弧多角形と仮定します．R_0 の 2 辺が共役とは，G の作用で移り合うことです．

*2）定義や命題は，直感に頼ったり，明記せずに何らかの有限性を仮定することもあります．参考文献を参照して下さい．領域には，境界まで込めることもあります．

*3）正確には，z に定数倍が掛かることもあります．

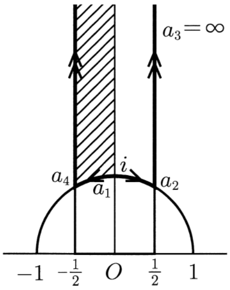


図 1　$G = SL(2, \mathbb{Z})$ の基本領域．文献 4) より一部改変して掲載．

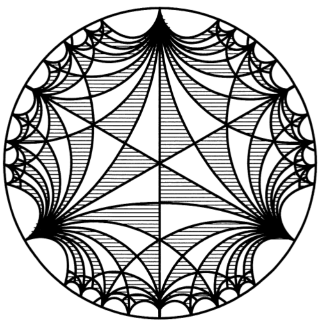


図 2　単位円の領域 R_j による分割．文献 4) より転載．

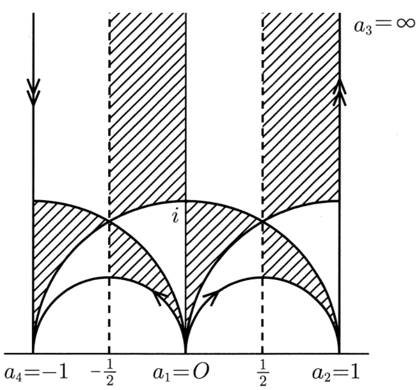


図 3　G_2 の基本領域．文献 4) より一部改変して掲載．

さらに，部分群

$$G_2 = \{g \in SL(2, \mathbb{Z}) \mid g \equiv g_0 \pmod 2\}$$

による保型関数 $\lambda(z)$ は，$\mathbb{H}$ から $\mathbb{P} \backslash \{0, 1, \infty\}$ の普遍被覆面への正則同型写像です．図 3 での基本領域は図 1 の基本領域 6 個を併せたものです．

IV.　シュワルツが超幾何微分方程式から得たもの，次の節で説明します．

3. 微分方程式

x, y の有理関数の，代数曲線

$$x^2 + y^2 = 1$$

上の積分は，x の関数 y が一価でないための困難を伴いますが，保型関数を使って

$$x = \cos z, \quad y = \sin z$$

と変換すると一意化されます．代数曲線が

$$y^2 = 4x^3 - g_2 x - g_3$$

の場合は $x = \wp(z)$, $y = \wp'(z)$ と変換すると同様に一意化されます．そして，ポアンカレの保型関数研究動機の一つが，フランス科学アカデミーが 1880 年に出した懸賞問題*4) を解くことだったようです．

2 階同次線形微分方程式は，未知関数をロンスキ行列式の平方根で割ると

$$v'' = R(x) v \tag{1}$$

に変形できます．v_1, v_2 を (1) の 1 次独立な解，$s = v_1/v_2$，とすると，s のシュワルツ微分は

$$[s]_x = \frac{s'''}{s'} - \frac{3}{2}\left(\frac{s''}{s'}\right)^2 = -2R(x) \tag{2}$$

を満たし，逆に $s(x)$ が (2) の解ならば，

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{s'}}, \quad v_2 = s v_1$$

が (1) の 1 次独立な解となります．

ところで，ガウスの超幾何微分方程式 (HD) の 3 つのパラメータ λ, μ, ν*5) がすべて整数の逆数または 0 で，

$$\lambda + \mu + \nu = 1 - \frac{2}{N}$$

を満たす自然数 N があれば，(HD) の適当な解

*4)「線形常微分方程式の理論に，何らかの重要な点で磨きをかけよ．」これは一意化の問題とも言われています．

*5) 通常のパラメータとの関係は，$\lambda = 1 - \gamma$, $\mu = \beta - \alpha$, $\nu = \gamma - \beta - \alpha$ です．

の比 $s(x)$ の逆関数は $\mathbb{H}$ 上の保型関数となることを，シュワルツが見出しました[*6)]．

からくりは次の通りです．(HD) の確定特異点 $0, 1, \infty$ での指数の差はそれぞれ λ, μ, ν で，$z = s(x)$ による上半平面の像は，頂角を $\lambda\pi, \mu\pi, \nu\pi$ とする $\mathbb{H}$ 上の円弧 3 角形 T です．実軸を越えて解析接続すると，T はその一辺に関する反転図形 T' に移り，接続を続けてできる 3 角形全体は $\mathbb{H}$ を敷き詰めるので，逆写像 $x = s^{-1}(z)$ が保型関数となります．基本領域は $T \cup T'$ で，不連続群はモノドロミー群[*7)]です．$(\lambda, \mu, \nu) = (1/2, 1/3, 0)$ および $(0, 0, 0)$ のときは，それぞれモジュラ関数 $j(z), \lambda(z)$ となり，図 1,2 の斜線部分や図 3 の左半分が上半平面の像です．

4. リーマン面から保型関数へ

大部分のリーマン面 R には，その普遍被覆面 $\tilde{R}$ から $\mathbb{H}$ への正則同型写像 h があり，h は R の基本群 $\pi_1(R)$ から $\mathbb{H}$ の不連続群 G への同型写像を誘導します．基本領域 R_0 は R に切れ目を入れた単連結領域 $\underline{R}$ の像です．X 上の線分以外の R_0 の辺は，切れ目をずらすことにより，X に直交する円弧（非ユークリッド計量での測地線[*8)]）に変形できるので，以後，円弧はすべて測地線を意味するものとします．切れ目 1 本は，h で R_0 の共役な 2 辺に移され，p 本の切れ目が放射状に出ている点の像は，頂角の和を 2π とする p 個の頂点に分かれます．

R が種数 g の代数曲線なら，切れ目の本数は $2g$ で，R_0 は円弧 $4g$ 角形であり，切れ目どうしの共通点が 1 点のみとすると，R_0 の頂点はすべてその点の像となり，したがって R_0 の内角の和は 2π となります．図 4 は $g = 2$ の場合です．

R が代数曲線から孤立点 P を除いた面の場合，P で 0 をとる局所座標 x と実数 b, c が存在して，

*6) $\lambda + \mu + \nu = 1 + \frac{2}{N}$，1 のときはそれぞれ $\mathbb{P}$，$\mathbb{C}$ 上の保型関数となります．

*7) 基本群から 2 次の正則行列群への準同型写像の像，特異点周りの解析接続による解の変化を表します．

*8) 松崎氏の論説を参照して下さい．

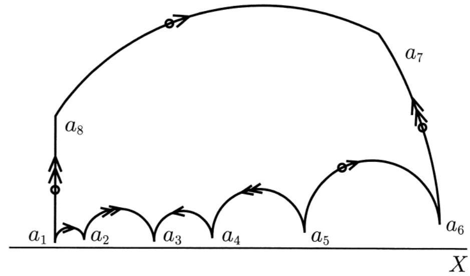


図 4　種数 2 の代数曲線と同型な基本領域．

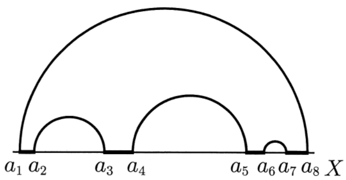


図 5　$\mathbb{P}$ から 3 円を除いてできるリーマン面と同型な基本領域．

$$\frac{1}{2\pi i} \log x = w = \frac{b}{z - c}$$

によって，P はまず ∞ に，ついで $z = c \in X$ に移るので，P の像は実軸 X 上の頂点として現れます．P に対応する頂点数は切れ目の入れ方によります．図 3 は $R = \mathbb{P} \setminus \{0, 1, \infty\}$ の場合で，実軸正の部分を切れ目としたとき，h による $0, \infty$ の像がそれぞれ a_1, a_3 で 1 の像が a_2 と a_4 です．

R が代数曲線から共通点のない円を除去してできるとき，その円周の像は X 上の辺として現れます．図 5 は R が $\mathbb{P}$ から 3 円を除いた場合です．切れ目は 2 本で，それぞれが 2 つの円弧に対応します．3 個の境界円のうち，一つは切れ目によって 2 つの部分に分れるので，それらの像は X 上の 4 線分となります．

5. 不連続群

ポアンカレは，分数 1 次変換よりなる群 G が，ある領域 D $(\neq \mathbb{P}, \mathbb{C})$ の不連続群であるとき，G で不変な円がなければクライン群と呼び，ゼータ・フックス級数によって研究を飛躍的に発展させました．この群は領域 D を変化させられるので[*9)]，

*9) $\mathbb{H}$ の変換群は複素解析的ではなく，リーマン面の複素解析的な族の研究には不便です．

後にタイヒミュラー空間を生み出す原動力となり，擬等角写像，リーマン面の分類，物理学の超弦理論などとの関連で近年注目されていますが，割愛します．固定円を持てば，それは D の境界で，G はフックス群と呼ばれます．

フックス群 G を得るには，行列による代数的方法や微分方程式による解析的方法などもありますが，シュワルツ（・クリストッフェル）の「(円弧)多角形を単位円に写す写像」をヒントとして，ポアンカレは基本領域から出発する幾何学的方法を採用しました．

$\mathbb{H}$ 上の円弧多角形*10) R_0 の辺は，端点を除いて $\mathbb{H}$ の内部にあれば第 1 種，X 上の線分なら第 2 種の辺と呼ばれ，第 1 種の辺のみの端点である頂点は，$\mathbb{H}$ 内部にあれば楕円的点，X 上にあれば放物的点または尖点と呼ばれます．そして，第 1 種の辺は 2 本ずつが共役，つまり，1 次変換で一方が他方に移る，と仮定し，そのような変換で生成される群を G とします．

R_0 を正方向に回る頂点を $\{a_j\}$ $(1 \leqq j \leqq n)$ とし，a_j から a_{j+1}, a_{j-1} に向かう辺をそれぞれ $l(a_j)$, $\bar{l}(a_j)$ と表します．頂点の列

$$C = \{c_j | 0 \leqq j \leqq p-1\}, \quad \big(c_j \neq c_0 \ (j \neq 0)\big)$$

において $c_0 = c_p$ とし，各 j に対して $l(c_j)$ を $\bar{l}(c_{j+1})$*11) に移す G の元 g_j が存在するとき，

$$g_{c_0} = (g_{p-1} \circ \cdots \circ g_1 \circ g_0)^{-1}$$

は，各頂点 c_j の頂角を θ_j とすると，中心 c_0，角度 $\theta_C = \sum_{j=0}^{p-1} \theta_j$ の回転となります．このとき C は，楕円的点か尖点のみよりなるので，それぞれ楕円的サイクル，放物的サイクルと言い，θ_C をサイクル C の角と言います．

G が不連続群のとき，C が楕円的サイクルなら，$2\pi/\theta_C = k_C$ が整数であり，放物的サイクルならば $\theta_C = 0$ です．G をリーマン面 R の普遍被覆面より定義すると，楕円的サイクルなら常に $k_C = 1$ ですが，R の分岐被覆面 R' によって不連続群 G' を作ったとき，$\tilde{R}'$ から $\mathbb{H}$ への同型写像 h' による $\underline{R}$ の像 R_0 がまた G' を含む不連続群 G の基本領域となるとき，$(k_C - 1)$ 次の分岐点の像として，$k \neq 1$ の場合が現れます．

*10) 一般な集合から出発しても，辺が X 上の線分でなければ，X と直交する円弧に変形できます．

*11) ある辺の共役辺は R_0 に隣接する領域の境界となるので，向きは逆になります．

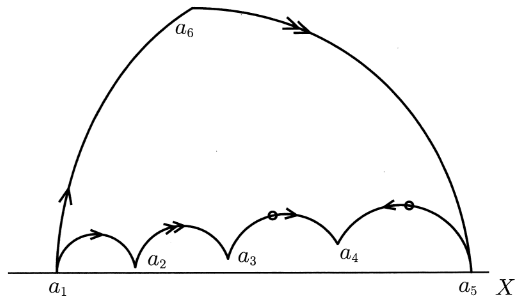


図 6　種数 0 の代数曲線と同型な基本領域．

例 1.　a_j $(1 \leqq j \leqq 2n)$ を頂点とし，$l(a_j)$ などを単に l_j などと表すことにして，共役な辺の組を，

$$(l_j, \bar{l}_{2n+2-j}) \quad (1 \leqq j \leqq n, \ a_{2n+1} = a_1)$$

とすると，サイクルは，

$$\{a_1\}, \ \{a_j, a_{2n+2-j}\}, \ \{a_{n+1}\} \quad (2 \leqq j \leqq n)$$

です．図 6 は $n = 3$ の場合です．

例 2.　n が偶数とし，辺を例 1 と同様に表して，共役な辺の組を

$$(l_{4j-3}, \bar{l}_{4j-1}), \ (l_{4j-2}, \bar{l}_{4j}) \quad (1 \leqq j \leqq n/2)$$

とすると，すべての頂点が周期 $2n$ の 1 個のサイクルに属します．図 4 は $n = 4$ の場合です．

例 3.　R が $\mathbb{P}$ から $n+1$ 個の小円を除いた領域のとき，図 5 のようにして作った基本領域 R_0 は第 1 種，2 種の辺を $2n$ 本ずつもちます．第 1 種の辺の共役な組は R の切れ目で決まりますが，実は，どの 2 本を共役としても不連続群ができます．すべて自由群なので，群としては同型ですが，基本領域は同型とは限りません．図 5 は $n = 2$ の場合です．

辺の共役性と角度の条件は G が不連続群となるために必要ですが，ポアンカレはこれが十分条

件でもあることを非ユークリッド計量を用いて証明しています.

6. 基本領域からリーマン面へ

R_0 が第1種の辺のみよりなるとき G を第1種のフックス群と言いますが，このとき，R_0 の共役な辺を貼り合わせると1つの楕円的サイクルは1点となります．さらに，c が放物的サイクル C に属する R_0 の頂点の1つのとき，式 (3) と類似の変換を逆向きに行なうと，C のすべての点を1点として付加してコンパクト化できます*12)．したがって，フックス関数の研究に代数関数論が使え，逆に，フックス関数が作れると，代数関数を作る新しい方法を得たことになります．こうして R_0 より代数曲線 R_G ができますが，その種数 g は辺の数を n としサイクルの数を q とすると，面，線，点の数についてのオイラーの公式によって，

$$2g = n + 1 - q$$

となります．

例1では種数は0です．$n = 2$ のときは，a_1, a_3 を結ぶ円弧に対して反転対称となり，頂角を θ_j とすると，$\theta_2 = \theta_3$ となります．さらに，

$$\theta_1 = 2\pi/3, \quad \theta_2 = \theta_3 = \pi, \quad \theta_4 = 0$$

ならば，モジュラ群です．

例2では種数は $n/2$ で，図4は代数曲線に切れ目を入れて単連結にするのに使われます．

例3のように第2種の辺を含む場合（第2種フックス群）は，R_0 と X について対称な領域 R_0' と R_0 の和集合の共役辺を貼り合わせた曲面を R_G とします．R_G は R を2枚重ねて辺を貼り合わせたもの，つまり R のダブルとなり，R の関数を境界を越えて解析接続するのに使われます．この場合も $\Theta_H(z)$ によって種々な結果が得られますが，省略します．

*12) それなら最初から尖点の無い場合のみを考えればよさそうですが，尖点では角度の条件がないので，不連続群が作りやすく，また，特定の点を指定できるとの利点があります．

7. 保型形式のもたらしたもの

今のところ，既知のもの以外，具体的な保型関数はありません．関数のない関数論は，仏作って魂入れず，となりかねませんが，これを一気に解決したのが，テータ・フックス級数 (TH) です．ポアンカレは，次のように述べています．

「シュワルツがフックス群研究への画期的な道を開いてくれたので，その結果を用いることもできただろうが，他の途を選んだ．その延長上では，R_0 が反転対称ならフックス関数存在の証明まではできるだろうが，一般論は多分だめで，しかも，私の級数表示は，単に存在証明のみでなく，解析的表現を与えているからである.」

この節では領域を $\mathbb{H}$ でなく Δ としますが，単に級数 (TH) を扱いやすくするためです．

G が第1種フックス群の場合，$m > 1$ ならば $\Theta_H(z)$ は Δ で収束し*13)，$|z| = 1$ を自然境界とする保型形式です．同じ重さのテータ・フックス級数の比は G で不変で，$H(z)$ に極があれば $\Theta_H(z)$ は恒等的には零でないので，フックス関数が具体的に構成されたことになります．さらに，任意のフックス関数は十分大きな重さのテータ・フックス級数の比で表されます．

$g(z) \in G$ のとき

$$\Theta_H(g(z)) = \Theta_H(z)\,(g'(z))^{-m}$$

を満たすので，$\Theta(z)(dz)^m$ は G で不変で，R_0 より作られたリーマン面 R_G 上で有理型の微分形式となります．実際，$z = c$ が尖点のとき，x, w を3節と類似な関数とすると*14)，

$$f(x) = \Theta_H(z)\left(\frac{dz}{dw}\right)^m = \Theta_H(z)\frac{(z-c)^{2m}}{b^m}$$

は $x = 0$ で有理型で，$2\pi i x dw = dx$ により $\Theta_H(z)(dz)^m$ が R_G 上の微分形式として $x = 0$

*13) 簡素化のため，各項の極を除いて広義絶対一様収束するときに，単に収束すると表現します．また，$|z| > 1$ でも収束し，別の関数を表します．

*14) 領域が Δ でなく $\mathbb{H}$ であるため b, c が実数とは限らないことを除けば同じです．

に接続できます．

重さ m の保型形式 $F(z)$ が Δ で正則かつ各尖点 c で $f(x)=F(z)(z-c)^{2m}$ が正則ならば重さ m[*15)] の正則形式またはフックス形式と，さらに $f(0)=0$ なら尖点形式と言われます．$m=1$ のときは $f(x)dz$ が第1種微分であることと同値です．その後の研究によると，$m \geqq 2$ ならば，テータ・フックス級数は尖点形式であり，逆にすべての尖点形式はテータ・フックス級数で表されます．

ここで，ポアンカレの初心の一つ，微分方程式に戻ります．R_G は代数曲線なので，フックス関数 $x=x(z)$，$y=y(z)$ が存在して，他の関数は x,y の有理式で表せます．上の x に対し，

$$v_1=\sqrt{\frac{dx}{dz}}, \quad v_2=zv_1$$

とおくと，v_1，v_2 ともに微分方程式

$$\frac{1}{v}\frac{d^2v}{dz^2}=\frac{2\frac{d^3x}{dz^3}\frac{dx}{dz}-3\left(\frac{d^2x}{dz^2}\right)^2}{4\left(\frac{dx}{dz}\right)^4}$$

を満たします．シュワルツ微分と似ている右辺は，実は，$-(1/2)[z]_x$ と等しく，さらに，x,y の有理式 $\varphi(x,y)$ となります．これは2階線形微分方程式

$$v''=\varphi(x,y)v \tag{3}$$

の解の比が $x(z)$ の逆関数 z であることを示すとともに，代数関数を係数とする2階線形微分方程式の係数を，対応する保型関数によって，一価関数とできることを意味します．

種数が0なら φ は x の有理関数で，(3)の特異点は，群 G のサイクル C に対応する x 平面上の点で，楕円的なら $\theta_C/2\pi=1/k_C$ が指数の差となります．$k_C=1$ なら特異点ではなく，尖点では，つまり $\theta_C=0$ なら，指数は等しく，対数分岐です．

8. 終わりに

正確なこと，詳しいことは次の文献を参照して下さい．関連する論文は文献8,9)ですが，ポアンカレの特徴である直感による間違いがあり，読みやすいのは文献6)です．1929年までの結果は文献7)を，それ以後のは文献2,3)を，クライン群については文献5)を薦めます．シュワルツの仕事は文献10)，ゼータ・フックス級数や代数関数論については文献1)です．多変数への拡張や整数論との関係，その他説明不足だった点については，文献4)の保型関数，不連続群，クライン群，(初等)整数論，連分数，常微分方程式などの各項目が参考になります．

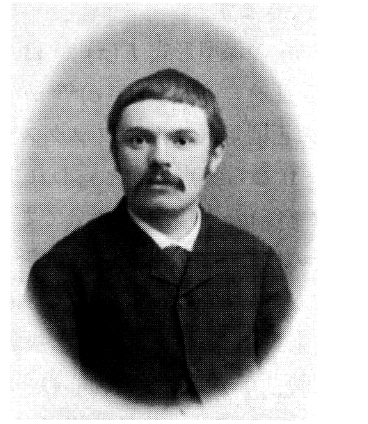
*15) 業界では通常重さ $2m$ と言われます．

参考文献

1) 岩沢健吉,『代数関数論』, 岩波書店, 1952.
2) 河田敬義,『1変数保型関数の理論 I, II』, セミナリー・ノート, 東大数学教室, 1963–64.
3) 土井公二, 三宅敏恒,『保型形式と整数論』, 紀伊国屋書店, 1976.
4) 日本数学会編集,『岩波 数学辞典』岩波書店.
5) Bers, L.-Kra, I., *A crash course on Kleinian groups, Lecture Notes in Math.*, 400, Springer.
6) Darboux, G., Œuvres de Henri Poincaré, II, Gautier-Villars, Paris, 1916, p.108–168, 169–257.
7) Ford, L.R., *Automorphic Functions*, Chelsea Publ. Comp., New York, 1929.
8) Poincaré, H., Sur la théorie des groupes fuchsiens, *Acta mathematica*, **1** (1882), p.1–62.
9) Poincaré, H., Sur les fonctions fuchsiennes, *Acta mathematica*, **1** (1882), p.193–294.
10) Schwarz, H.A., Über diejenigen Fälle, in welchen die Gaussische hypergeometrische Reihe eine algebraische Funktion ihres vierten Elements darstellt, *Crelle's J.*, **75** (1872), p.292–335.

（てらだ・としあき，滋賀医科大学名誉教授）

ポアンカレと非ユークリッド幾何学



松崎 克彦

1. 双曲平面のモデル

2 次元の上半平面 $\mathbf{H}=\{(x,y)\mid y>0\}$ を考える．いまこの $\mathbf{H}$ 上に，ある別世界（非ユークリッド世界）を映す地図が描かれているとする．その世界には大きさも形も等しい無限個の国があり，地図に表すと図 1 のようになっている．地図には点ごとの縮尺が定められていて，地図上では実軸 $y=0$ に近いほど小さく表されているが，この世界では，これらの国はすべて互いに合同である．

さて，図の A 国と B 国を結ぶ道路を作ることになった．最短で結ぶためには，どのような経路をとればよいだろうか？ すべての国は合同なので，途中に通過する国の数が最も少なくなるようにすればよい．実際，図のような経路が最短になっている．地図上の直線（A から B までの実軸に平行な線分）が，実際の最短距離を与えてはいないのである．

次に，A, B, C の 3 国間にそれぞれ道路を作ることを考えよう．道路は通過する国の数が最小になるような経路をとることにする．すると，3 本の道路で囲まれた地帯 $\Delta=\Delta(\mathrm{A,B,C})$ ができるが，この中に完全に含まれる国（道路が通過する国は除く）はいくつあるだろうか？ A, B, C の取り方を変えて，国の間の距離が大きくなるようにすれば，Δ に含まれる国の数はいくらでも増えるように思うかもしれないが，そうではない．ある定数があって，どんな場合でもその定数を超えることはない．差し詰め Δ に含まれる国の数はいつでも一桁の数であると言っておけば間違いはないだろう．

問題 A, B, C を動かしたときの $\Delta(\mathrm{A,B,C})$ に完全に含まれる国の数の最大値を求めよ．

では，この地図の縮尺はどのように定められているのであろうか？ 虚軸 $x=0$ 上で各国の境界が定める分点がどのように並んでいるかを見ると，

$$\cdots,\ \frac{1}{8},\frac{1}{4},\frac{1}{2},1,2,4,8,\cdots$$

となっている．各分点間の実際の距離は等しいので，これは対数目盛りであることがわかる．つまり，（底を 2 とする）対数をとった

$$\cdots,\ -3,-2,-1,0,1,2,3,\cdots$$

が実際の長さで計った分点の位置ということになる．対数 $\log y$ は $1/y$ の積分である．よって，点 $\mathrm{A}=(x,y)$ における縮尺は $1/y(\mathrm{A})$ となっている．これが $\mathbf{H}$ に双曲平面と呼ばれる世界を描くための縮尺である．

双曲平面のモデル（地図）を少し数学的に述べてみよう．上半平面 $\mathbf{H}$ のユークリッド計量（地図上での長さ）を線素 $ds_{\mathrm{E}}=(dx^2+dy^2)^{1/2}=|dz|$ で表すとする．双曲平面の計量（実際の長さ）ds_{H} は，各点 $(x,y)\in\mathbf{H}$ における密度函数（縮尺）$1/y$ をかけて $ds_{\mathrm{H}}=ds_{\mathrm{E}}/y$ と表されるユークリッド計量と等角な計量である．双曲平面上の曲線 γ の

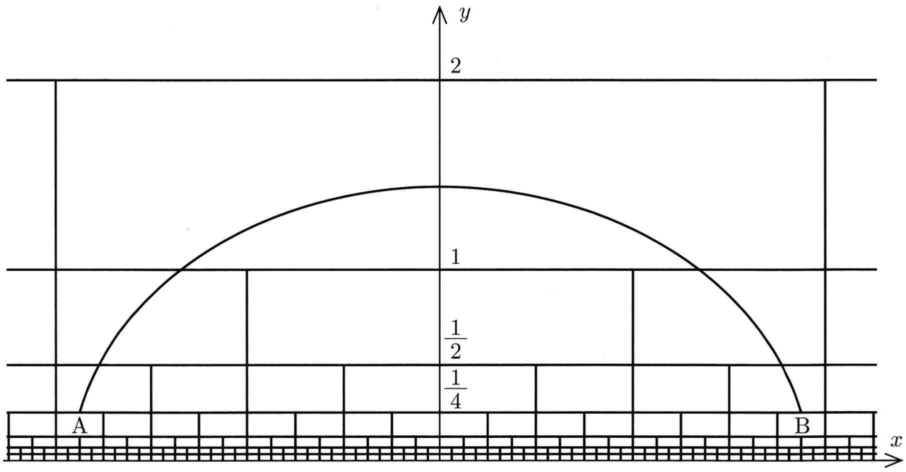


図 1　双曲平面の地図.

長さは積分 $\int_\gamma ds_{\rm H}$ で与えられる．2 点 A, B 間の距離 $d_h({\rm A},{\rm B})$ は，A と B を結ぶ曲線 γ 全体にわたってとった長さの下限で定義される．実際には下限を与える（したがって長さが最小となる）曲線が一意的に存在する．それを A と B を結ぶ測地線と言う．双曲平面の上半平面モデルにおいては，測地線（道路）は実軸と直交する円周の部分弧として表される．3 点 A, B, C を任意に与えたとき，各 2 点間を結ぶ測地線が存在するので，3 本の測地線により三角形 $\Delta({\rm A},{\rm B},{\rm C})$ ができる．この面積は，双曲計量の面積要素（ユークリッド計量の面積要素を用いて $dxdy/y^2$ と表される）を積分することにより求められる．A, B, C の内角をそれぞれ α,β,γ とすると，面積は $\pi-(\alpha+\beta+\gamma)$ で与えられる．双曲平面の三角形の面積は常に π 未満であること，三角形の合同類は内角 α,β,γ により決定されることなどが，ユークリッド幾何との著しい違いである．

2. ポアンカレ計量と合同変換群

ユークリッド原論の平行線公理を否定した幾何学の可能性は，19 世紀にはガウス，ロバチェフスキー，ボヤイらにより主張された．しかし，幾何学とは何かということに明確な定義があったとは言えない時代に，それは実体を伴った存在と言うよりは，むしろ論理上の問題に近いものであったと言えるだろう．リーマンに始まる空間の計量の概念は，19 世紀後半の数学の深化とともに，より具体性をもった対象へと進み，ポアンカレに至って双曲幾何学としてその基礎が完成したと考えられている．実際，双曲平面の単位円板モデルはポアンカレモデルと呼ばれ，そこでの双曲計量はポアンカレ計量とも呼ばれている．しかし，そのようなモデルや計量はポアンカレ以前にも存在したのである．例えば，上記の上半平面モデルはベルトラミによるものであり，その研究は双曲幾何学の創成に大きな役割を演じている．

ベルトラミは既に 3 次元（さらには一般次元でも）上半空間 $\mathbf{H}^3=\{(x,y,t)\mid t>0\}$ に計量 $ds_{\rm H}=ds_{\rm E}/t$ を与え，$\mathbf{H}^3$ 内の単位半球面 $S=\{(x,y,t)\in\mathbf{H}^3\mid x^2+y^2+t^2=1\}$ にその計量を制限することで，双曲平面を考えている．その場合，測地線は xy-平面に垂直な平面と S との交わりとして現れる．半球面 S を単位円板 $\mathbf{D}=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}$ に直交射影すれば，双曲平面の射影モデル（クラインモデル）となる．また，$\mathbf{D}$ に $(0,0,-1)$ を光源として立体射影すれば，円板モデル（ポアンカレモデル）となる．この場合の計量も計算していて，$\mathbf{D}$ のポアンカレ計量

$$ds_{\rm D}=\frac{2(dx^2+dy^2)^{1/2}}{1-(x^2+y^2)}=\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$$

を本質的に導いている．

では，ポアンカレの双曲幾何に対する最大の貢献は何であろうか？ それは，2 次元双曲平面 $(\mathbf{H}, ds_{\mathrm{H}})$，そして 3 次元双曲空間 $(\mathbf{H}^3, ds_{\mathrm{H}})$ の向きを保つ合同変換群（等長変換群）が 1 次分数変換 $\frac{az+b}{cz+d}$，すなわち，複素射影直線 $\mathbf{C}P^1$ の変換からなる群であることを認識し，双曲幾何をその合同変換群で不変な性質を研究するものとして捉えた点にあると考えられる．実際には，ポアンカレの出発点はより解析的な色彩が強く，その理解のために双曲計量の有用性を発見し，複素解析に幾何学的な議論を導入するための新しい道を開拓したと考えるほうがより正確かもしれない．

3. 不連続群

ポアンカレの 1 次分数変換群の研究は，フックスによる 2 階線形微分方程式の理論の正当化に端を発している．有理関数 $p(z), q(z)$ に対して，

$$\frac{d^2w}{dz^2} + p(z)\frac{dw}{dz} + q(z)w = 0 \qquad \cdots \quad (*)$$

の 1 次独立な 2 つの解の比 $\zeta(z) = w_1(z)/w_2(z)$ の逆関数 $z = h(\zeta)$ について考える．フックスは解の解析接続の研究の中で，この h が ζ の有理関数となることを主張していた．いま (w_1, w_2) を（局所的な）解の組とすると，別の組 $(\tilde{w}_1, \tilde{w}_2)$ は 1 次結合 $\tilde{w}_1 = aw_1 + bw_2$, $\tilde{w}_2 = cw_1 + dw_2$ で書ける．このとき $\tilde{\zeta} = \tilde{w}_1(z)/\tilde{w}_2(z)$ は $\zeta = w_1(z)/w_2(z)$ の $\frac{a\zeta+b}{c\zeta+d}$ による像である．$h(\zeta)$ が有理関数であるためには，少なくとも $\zeta(z)$ の値域は $\mathbf{C}P^1$ 全体にわたり，かつ，1 次分数変換からなるモノドロミー群に対する不変性をもたなければならない．

ポアンカレは，ミッタク・レフラー編集による *Acta Math.* 第 1 巻の巻頭の論文「フックス群の理論」(1882) において，1 次分数変換 $\frac{az+b}{cz+d}$ $(ad - bc = 1)$ からなる不連続群を考察する．1 次分数変換の円円対応，非調和比の保存が述べられ，固定点，拡大係数とトレース $a + d$ の関係を経て変換型の分類がなされる．そして，係数 a, b, c, d がすべて実数の場合の実型 1 次分数変換群 $(PSL(2, \mathbf{R}))$ が，上半平面 $\mathbf{H}$ の計量 $ds_{\mathrm{H}} = |dz|/y$ に関する合同変換であることを主張する．この計量に関する測地線（実軸に直交する円弧），長さ，面積を用いて，ロバチェフスキーの言う平行線公理を仮定しない幾何が展開できることが宣言される．

以下，不連続群の理論が登場する．1 次分数変換からなる群 G の元が，恒等変換に集積しないとき，G を不連続群と定義する．この概念は，G に関して保型的（任意の $g \in G$ で $h(g(z)) = h(z)$）な非定数有理型関数 h が存在するための必要条件として出るものである．特に実型 1 次分数変換群からなる不連続群にフックス群という名称が与えられた．

微分方程式 $(*)$ の解の比の逆関数 h が，$\mathbf{H}$ 上で定義された有理型関数となる場合を考察するために，フックス群を先に与えて，それを不連続なモノドロミー群としてもつ方程式を構成することがポアンカレの当初の目標であった．しかしそれは図らずも，以下に述べるように，フックス群一般により定義される「曲面」に対して，その上に存在する有理型関数を構成する道を開いた．これは，「曲面」を複素平面が分岐しながら重なり合うリーマンの意味での領域として捉えることに相当する．

4. 基本多角形

フックス群 G に対して，その基本領域 R が $\mathbf{H}$ 上に考えられる．簡単に言えば，G の元による R の像が互いに重なることなく $\mathbf{H}$ を埋め尽くすような領域である．モジュラー群 $PSL(2, \mathbf{Z})$ に対するガウスの有名な図や，シュヴァルツの鏡映変換によるタイル貼りなど基本領域の概念は既に普及していたし，それらは円弧で囲まれた領域として実現されていた．ポアンカレは上記の論文の中で，それを一般のフックス群に対して試みる．今日では，G による点の軌道を中心とする双曲距離に関する等距離分割（ディリクレ領域）を考えるのであるが，ここではなぜか双曲計量が表に出ない不明瞭な議論が続く．基本多角形 R の辺（測地線分）を他の辺に写す G の元の組が G を生成すること，また，G の元で写り合う頂点の作るサイ

クルがその生成系の基本関係を与えることも言及されている．暗黙のうちに基本多角形は有限辺からなることが仮定されている．

逆に，双曲多角形 R とその辺の間の貼り合わせ変換が与えられたとき，どのような条件の下でその変換の組は R を基本領域とするフックス群を生成するだろうか？ ポアンカレの多面体定理（の2次元版）と呼ばれる結果は，大雑把に言えば，フックス群の基本領域がみたすべき必要条件（特に頂点のサイクルに関する条件）をみたす多角形の貼り合わせ変換ならば可能であるという主張である．

さて，論文の後半は，この基本領域の分類とそれをもつフックス群の構成に費やされる．基本多角形の頂点が $\mathbf{H}$ 内にあるときを第一類，実軸 $\mathbf{R}$ 上に1点としてあるときを第二類，$\mathbf{R}$ 上に区間としてあるときを第三類と呼び，それぞれの存在・非存在に応じて基本領域を（したがってフックス群を）7つの族に分けて考察している．一見，冗長に見えるこの部分も，ポアンカレの問題意識からすれば必然なのかもしれない．それは，微分方程式 $(*)$ において，解のモノドロミー群から方程式を決定すること（のちにはリーマン・ヒルベルトの問題として発展する）が念頭にあるためである．さらには，同じ族のフックス群に対しては同じ型の微分方程式が対応し，その退化の状態も対応関係にあることを，基本領域の連続変形の議論（タイヒミュラー空間の萌芽）を用いて示そうとしたためである．リーマン面の概念がまだ不完全な時代にあっては，このフックス群の基本領域こそが，平面領域を超えた対象を幾何学的に表現する手段だったのである．

5. 3次元への拡張

ポアンカレは論文「クライン群の研究報告」（*Acta Math.* 1883）において，複素係数の1次分数変換からなる不連続群へ議論を拡張する．フックス群以外の不連続群の例は，ショットキーやクラインによる円周に関する反転で生成される群が既に知られていた．ポアンカレにとってこの一般化は，フックスの微分方程式の問題を考察する上でも自然な方向である．

ポアンカレは，G が不連続群でありながら，ある点 $z \in \mathbf{C}$ における群の作用は，軌道 $G(z)$ が集積するという意味で不連続になり得ないことに注意した．今日の用語では極限集合（とその補集合の不連続領域）を定義したものであるが，これを improperly (properly) discontinuous（英訳）と呼んでいる．この括弧内の条件を日本語では固有不連続あるいは真性不連続と言うが，「固有」は proper map からくる数学的な訳，「真性」はポアンカレに由来する歴史的な訳であると言えるだろう．複素平面上に真に不連続な点をもつような不連続群をクライン群と命名し，その不連続領域上での基本領域を考察する．しかし，ここで困難に直面する．基本領域の型の複雑性は，もはや分類可能な範疇にはないのである．3次元上半空間への拡張はここに始まる．

1次分数変換は，円周に関する反転の偶数回の合成で表されることに注意する．複素平面のアファイン変換は，原点中心の拡大 $z \mapsto az$ と平行移動 $z \mapsto z+b$ の合成である．これに逆数 $z \mapsto 1/z$ を加えれば1次分数変換全体が生成できる．拡大は同心円2つに関する反転の合成，平行移動は平行な直線2つに関する反転の合成，逆数は単位円周と実軸に関する反転の合成である．ただし，単位円周に関する反転とは，$re^{i\theta} \mapsto \frac{1}{r}e^{i\theta}$ を意味する．ポアンカレは，この反転を上半空間 $\mathbf{H}^3$ に拡張することを考えた．つまり，複素平面の単位円周に対しては，それを境界にもつ $\mathbf{H}^3$ の単位半球面に関する反転 $j : r\boldsymbol{v} \mapsto \frac{1}{r}\boldsymbol{v}$（$\boldsymbol{v}$ は単位ベクトル），直線に対しては，それを境界にもつ $\mathbf{H}^3$ の垂直平面に関する反転を対応させる．1次分数変換 f を反転の合成で表し，それぞれの反転の3次元への拡張の合成により f の拡張を定義するのである．反転の合成への分解は一意的ではないが，拡張の定義は well-defined である．$\mathbf{R}^3$ の球面に関する反転で生成される共形変換については，メビウス，リュービルなどによる先行する結果があるが，ポアンカレの着眼は1次分数変換の拡張にある．

3次元双曲空間の上半空間モデル（ベルトラミモデル）は，$\mathbf{H}^3$ に計量 $ds_{\mathrm{H}} = ds_{\mathrm{E}}/t$ を与えたものである．この合同変換群が，1次分数変換群 $PSL(2,\mathbf{C})$ の3次元への拡張であることをポアンカレは看破した．それを見るためには，垂直平面および単位半球面に関する反転が計量を保つことを言えばよい．垂直平面に関しては明らかである．単位半球面に関する j の微分の点 $r\boldsymbol{v} \in \mathbf{H}^3$ におけるユークリッドノルムは $1/r^2$ であり，これは双曲計量の密度関数の $r\boldsymbol{v}$ と $j(r\boldsymbol{v})$ での比に一致するので，この場合も成り立つ．これより，$PSL(2,\mathbf{C})$ の不連続群は，3次元双曲空間に合同変換として作用すると考えることができる．状況は $PSL(2,\mathbf{R})$ の不連続群が合同変換として2次元双曲空間に作用する場合と同じであり，$\mathbf{H}^3$ の各点において真に不連続になっている．

ポアンカレは2次元の場合と同様に，不連続群 G に対して $\mathbf{H}^3$ に基本多面体 P を構成し，G の生成元と基本関係が P から得られること，逆に双曲多面体と面の変換が与えられたとき，それが不連続群の基本領域となるための条件（多面体定理）を述べている．しかし，これらは2次元の場合に比べて（特に頂点のまわりでの関係の記述が）難しくなる．厳密な証明が文献として現れたのは後世になってからである．ポアンカレは多面体定理を適用して，（フックス群ではない）不連続群の例をいくつか構成している．また，基本多面体の変形によるクライン群の変形を考えている．しかし，3次元双曲幾何が本質的に有効であるようなクライン群の議論はまだ存在せず，ポアンカレ以後は，それは長い準備期間に入るのである．

6. ポアンカレ級数

ポアンカレの不連続群に関連する一連の研究の中で重要なものは保型関数の理論である．論文「フックス関数の研究報告」（*Acta Math.* 1882）は，上記「フックス群の理論」と同時期に書かれたものである．フックス関数とは，フックス群の各元 $g \in G$ に対して，$h(g(z)) = h(z)$ をみたす関数のことである．楕円関数は，複素平面のユークリッド変換群 Ω に対する保型性をもち，したがってトーラス上の有理型関数を与える．この類似を双曲変換群 G に対して考えたものと言える．ワイエルシュトラスの $\mathcal{P}$ 関数の構成法に習えば，単位円板 $\mathbf{D}$ 上の有理型関数 f に対して，もし $\sum_{g\in G} f(g(z))$ が収束すれば，和は G に関する保型性をもつ．しかし，この収束を証明することは難しい．代わってポアンカレは，今日ポアンカレ級数（Θ 級数）と呼ばれる

$$F(z) = \sum_{g\in G} f(g(z))g'(z)^m$$

を考えた．収束すれば，これは $F(g(z))g'(z)^m = F(z)$ をみたす．これを Θ フックス関数と呼んだ（楕円関数に対するテータ関数の類似）．F 自身は保型関数ではないが，同じ次数 m に対する独立な Θ フックス関数 F_1, F_2 を選び，その商 $h(z) = F_1(z)/F_2(z)$ をとれば，これがフックス関数となる．

ポアンカレは，単位円周の近傍で有界な有理型関数 f に関する Θ 級数は，m が1より大きいとき，極を除き収束することを証明した．f として $\mathbf{D}$ 上の極が G の作用で重ならないものをとれば，Θ フックス関数 F は非自明な有理型関数となり，極の軌道が交わらない f_1, f_2 をとれば，F_1, F_2 は独立になる．G の基本多角形内での F の零点と極の個数の差が，m と基本多角形の辺の数（種数に対応する）で評価できることも示している．一方，$\mathbf{D}$ 上に極をもたない f をとった場合，$F \equiv 0$ となり得ることも考察し，Θ 消滅問題を提起している．一般に，このような F の間には代数関係が存在し，これら全体の次元は有限である．

Θ 級数の収束のためには，$\sum_{g\in G} |g'(z)|^m$ の収束を示せば十分である．ポアンカレは2通りの証明を与えている．一つは $\mathbf{D}$ のユークリッド面積で評価するものである．z 中心の円板 U を十分小さくとり，$\{g(U)\}_{g\in G}$ が互いに交わらないようにする．これらの面積の総和は $\sum_{g\in G} |g'(z)|^2$ と比較可能であり，それは π を超えない．

二つ目の証明が双曲幾何を使うものであり，のちのクライン群の収束指数や極限集合のハウスドルフ次元の理論に発展する（ただしポアンカレ自身は，クライン群の論文において，この証明は3次元には適用できないと述べている）．まず，g が双曲計量 $\frac{2|dz|}{1-|z|^2}$ に関して等長的であることより，$|g'(z)| = (1-|g(z)|^2)/(1-|z|^2)$ が成り立つ．z を固定するごとに，分母は定数と見なせる．分子は $\exp(-d_h(0, g(z)))$ と比較可能であるので，級数

$$\sum_{g \in G} \exp(-m d_h(0, g(z)))$$

が $m > 1$ で収束することを見ればよい．$a > 0$ を U の双曲半径より十分小さくとり，各自然数 n に対して，原点 0 中心で双曲半径 na と $(n+1)a$ の円周で囲まれた円環 A_n を考える．双曲半径 r の円周の長さは $\pi \sinh r$ であるので，A_n に入る $g(z)$ の数は高々 $\exp(an)$ に比例し，したがって，これら全体の級数への寄与は $\exp(-mna) \cdot \exp(na) = (e^{(1-m)a})^n$ の定数倍で評価できる．よって $m > 1$ ならば，自然数 n にわたってとった和は収束する．

7. 現代数学への流れ

ポアンカレの論文以後，1次分数変換の不連続群に関する研究はフリッケ・クラインにより集大成され，以後の研究が続いた．また保型関数に関してはフォード[1)]によりその後の進展を含めて当時の研究がまとめられている．それに対して，3次元双曲幾何学は，ポアンカレを受け継ぐ研究は当初はあまりなかったようである．しかし，その後約一世紀，サーストン以後の3次元双曲多様体論が展開されるまでの間に，脈々と受け継がれて来たポアンカレ由来の数学がある．

マスキットによるポアンカレの多面体定理，クラインの結合定理の拡張の研究は，クライン群を基本単位から構成するアルゴリズムを整備した．クラによるポアンカレ Θ 級数および保型関数の研究は，Θ 級数により定義される線形作用素のノルムについての Θ 予想や Θ 消滅問題などの未解

決問題を提示した．また，リーマン面上の複素射影構造のモノドロミー表現の単射性に関する基本定理は，ポアンカレに遡ることができる．マーデンは，3 次元双曲空間に有限面の基本多面体をもつ幾何学的有限なクライン群について，ポアンカレ以来の基本多面体の変形による生成元の変形を考察する方法により，構造安定性などの擬等角変形理論の基本定理を証明した．

サーストンによる 3 次元双曲多様体の一意化定理は，ある自然な条件をみたす 3 次元閉多様体には双曲構造が入る（すなわちクライン群の基本多面体の面を貼り合わせてできる多様体と同相である）ことを主張したものである．与えられた位相多様体を切り開いていき，単純な部分に双曲構造をまず導入する．それらのパーツを元の形に組み立てていく段階では，多面体定理や結合定理のような構成定理を用いる．最後に残った面 S, S' を貼り合わせて，閉じた双曲多様体を完成させる段では，サーストンは有界像定理という結果を使った．うまく貼り合うように S の双曲構造を変えると，その影響が対となる S' の双曲構造にまで及んでしまう．しかし，もし S の変形に対して，その S' への影響が小さく，いくら大きく変形しても，その結果が有界に留まるならば，両者がちょうど貼り合う双曲構造を見つけられるのである．

双曲構造の変形はタイヒミュラー空間の言葉で記述できる．S の動きに対して S' の動きを対応させる写像 σ が，タイヒミュラー空間の縮小写像であることを主張していると考えてもよい．マクマレンは，この写像 σ の微分の双対写像が，接空間の双対空間である可積分正則保型形式の間の Θ 級数で定義される作用素であることを見抜き，その作用素ノルムが 1 より真に小さくなるという Θ 予想を解決して，微分の縮小性を証明した．最近では，σ の微分の下からの評価，特に定値写像でないことが証明され，クライン群の理論に進展がもたらされている．σ の微分が消えないことを示すことは，ある種のポアンカレ Θ 級数の消滅問題であると解釈できる．

8. あとがき

本論説を書くにあたり，ポアンカレの論文を文献 2) による翻訳で初めて読んだ．翻訳者による簡潔な解説もあり，出典として有用であった．日本語による詳しい論文解説としては文献 3) がある．関連する 19 世紀の数学史，特に，本論説では触れなかったポアンカレとクラインの数学上の関係については，精緻な検証に基づく文献 6) が興味深い．ポアンカレの不連続群の研究の背景については，この著作から知ることができた．本文で解説した双曲幾何学については，より詳しく学ぶための参考書として文献 4, 5) および文献 7) を挙げておく．

参考文献

1) L.R. Ford: *Automorphic Functions*, Chelsea (1929).
2) H. Poincaré: *Papers on Fuchsian Functions*, J. Stillwell (trnsl.), Springer–Verlag (1985).
3) 斎藤利弥：『線形微分方程式とフックス関数 ポアンカレを読む I, II, III』，河合文化教育研究所 (1991, 1994, 1998).
4) 谷口雅彦，奥村善英：『双曲幾何学への招待　複素数で視る』，培風館 (1996).
5) 小島定吉：『多角形の現代幾何学（増補版）』，牧野書店 (1999).
6) J. J. グレイ：『リーマンからポアンカレにいたる線型微分方程式と群論』，関口次郎，室政和訳，シュプリンガー・ジャパン (2002).
7) 深谷賢治：『双曲幾何』，岩波書店 (2004).

（まつざき・かつひこ，岡山大学大学院自然科学研究科）

ポアンカレと力学系



金　英子

1. 数学における発見

アンリ・ポアンカレ（1854–1912）は『科学と方法』[8]の3章で「発見とは，既に知られている数学的な事実を用いて新しい組み合わせをつくることではなく，無用な組み合わせを排除し有用な組み合わせをつくることである．即ち発見とは識別であり選択である．」[*1]と書いています．ここでは力学系理論におけるポアンカレの偉大な発見について，そしてそれらが後世にどのような形で受け継がれたかについて述べます．

2. 力学系とは

力学系とは状態が時刻と共に決定論的に変化するシステムのことを言います．決定論的とは，初期値を決めればある時刻での状態が一意的に定まるということです．X を集合とし，時刻を表す集合 T を実数全体 $\mathbb{R}$ または整数全体 $\mathbb{Z}$ のいずれかとします[*2]．写像 $\phi : X \times T \to X$ が次の条件を満たすとき，ϕ のことを，$T = \mathbb{R}$ の場合は連続力学系と言い，$T = \mathbb{Z}$ の場合は離散力学系と言います．

1 $\phi(x, 0) = x$,
2 $\phi(x, s+t) = \phi(\phi(x, s), t)$.

時刻 $t \in T$ ごとに対応 $x \mapsto \phi(x, t)$ により写像 $\phi^t : X \to X$ が定まります．1パラメータ族 $\{\phi^t\}_{t \in T}$ を力学系と言うこともあります．

例 2.1 ユークリッド空間 $X = \mathbb{R}^m$ 上のベクトル場を $v(x)$ $(x \in X)$ とし，常微分方程式

$$\frac{dx(t)}{dt} = v(x(t))$$

を考える．$t = 0$ で初期値 $x_0 \in X$ から出る解を $\phi(x_0, t)$ とする．$v(x)$ が連続的微分可能であれば，常微分方程式の解の存在と一意性より十分小さい t については一意的な解 $\phi(x_0, t)$ が存在する．任意の $x \in X$ と任意の $t \in \mathbb{R}$ について一意的な解 $\phi(x, t)$ が存在すると仮定すると，この $\phi : X \times \mathbb{R} \to X$ は連続力学系である．

例 2.2 位相空間 X 上の同相写像を $f : X \to X$ とする．f の n 回の合成写像 $f \circ f \circ \cdots \circ f$ を f^n と表し，f^n の逆写像を f^{-n} と表す．このとき $\phi(x, n) = f^n(x)$ とすると $\phi : X \times \mathbb{Z} \to X$ は離散力学系である．$f : X \to X$ を離散力学系と言うこともある．

連続力学系 $\{\phi^t\}_{t \in \mathbb{R}}$ に対し，初期時刻における状態 $x \in X$ の各時刻 t における状態の集合

$$\mathcal{O}(x) = \{\phi^t(x) \mid t \in \mathbb{R}\}$$

---

*1) 如何にして有用な組み合わせをつくるか？ ポアンカレは自身のエピソードに基づき文献 8) の 3 章でこの問いに答えている．

*2) T として 0 以上の実数全体 $\mathbb{R}^+$ または 0 以上の整数全体 $\mathbb{Z}^+$ を考える場合もある．

を $\{\phi^t\}_{t\in\mathbb{R}}$ による x の軌道と言います．1点からなる集合が軌道になる場合，力学系がベクトル場の解として得られるのであれば，その点はベクトル場の平衡点に対応します．ある正の実数 $t>0$ について $\phi^t(x)=x$ が成立するとき，そのような最小の t を x の周期と言い，x の軌道を周期軌道と言います．同様に離散力学系 $f:X\to X$ に対し，初期時刻における状態 $x\in X$ について

$$\mathcal{O}(x)=\{f^n(x)\mid n\in\mathbb{Z}\}$$

を f による x の軌道と言います．ある自然数 n について $f^n(x)=x$ が成立するとき，そのような最小の n を x の周期，x の軌道を周期軌道，そして x を周期点と言います．特に周期が 1 の周期点を不動点と言います．

3. 力学系理論の創始者

1885年，ポアンカレはスウェーデンとノルウェーの国王オスカー二世の還暦祝いの懸賞問題の一つであった天体力学の n 体問題に取り組み始めます．ポアンカレが31歳の頃です．3年目にポアンカレは3体問題を定量的な方法で解くことには限界があることを発見します．論文の提出の締め切りは間近に迫った1888年6月であり，ポアンカレは未完成であるがこれまでに自分が得た天体力学における新しい視点について書くことを決意し，1888年5月に論文を提出します*3)．

翌年1月，賞はポアンカレに与えられ，受賞論文[5)]は Acta Mathematica 誌に掲載されます．それから後，ポアンカレは『天体力学の新しい方法』[6)]と題する3部作（33章からなる）を 1892 年から 1899 年の間に執筆します．『天体力学の…』には微分方程式の解の挙動を定性的に理解しようとする姿勢が表れており，今日の力学系理論の基礎的な考え方が詰まった教科書と言えます．

力学系ではポアンカレ写像と呼ばれる概念があります．これは連続力学系を離散力学系に帰着させるための一つの道具です．例えば微分方程式から得られる連続力学系が周期軌道 $\mathcal{O}$ を持つと仮定し，$\mathcal{O}$ と横断的に交わる断面 S があり，その上には平衡点が存在しないと仮定すると，S 上の点 x の軌道が次に S を通過する点 x' を対応させる写像 $x\mapsto x'$ が考えられますが，これをポアンカレ写像と言います．これは S 上のすべての点で定義できるとは限りませんが $\mathcal{O}\cap S$ に十分近い点では定義されます．この写像を導入したのがポアンカレであり『天体力学の…』にも登場しています．

『天体力学の…』の 26 章の内容は流体の粒子の回帰性です．水を張った容器内の水分子の時間発展を考えると，無視できるほどの分子の集合を除き，ほとんどの分子は初期位置のいくらでも近くを無限回横切るという事実が述べられています．当時は測度論の言葉はなく，ポアンカレは確率を使って議論を進めていますが“無視できるほどの集合”という意味はルベーグ測度 0 の集合に対応しています．ここでの分子の回帰性の研究は後にエルゴード理論を生むことになります．この章の主張は測度論の言葉で定式化され，今日ではポアンカレの回帰定理と呼ばれています．

最終章の内容は，ポアンカレが n 体問題に挑戦していた3年目に発見した内容を結実させたものです．ここでは二重漸近解（ホモクリニック解）を取り上げ，この解が引き起こす複雑な現象について説明しています．ここでポアンカレが見たものは今日で言うところのカオス現象でした．

4. ホモクリニック点が存在すると何が起こるか？

平面上の微分同相写像 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ の不動点 p が双曲型であるとは，p でのヤコビ行列 $Df(p)$ が単位円周上に固有値を持たないこととします．双曲型不動点 p に対して，次の2つの集合

$$W^s(p)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid f^k(x)\to p\ (k\to\infty)\},$$
$$W^u(p)=\{x\in\mathbb{R}^2\mid f^k(x)\to p\ (k\to-\infty)\}$$

は f と同じ滑らかさをもった部分多様体となり*4)，それぞれ p に対する安定/不安定多様体と呼ばれて

*3) この辺りのことは文献 1, 10) に詳しい記述がある．

います．一般に $q \in (W^s(p) \cap W^u(p)) \setminus \{p\}$ を（p に関する）ホモクリニック点と言います（図 1(1)）．特に $W^s(p)$ と $W^u(p)$ が q で横断的であるとき，q は横断的であると言います．ホモクリニック点 q は定義より $f^k(q) \to p$ $(k \to \pm\infty)$，即ち未来と過去の時間の向きに関して p に漸近する点です．

横断的ホモクリニック点が存在することによって起こる現象（以下ホモクリニック現象と言う）を考察します．いま簡単のため f は向きを保存すると仮定し，q を不動点 p に関する横断的ホモクリニック点とします．$W^s(p)$ と $W^u(p)$ はそれぞれ $\mathbb{R}$ と同相で，$W^s(p) \setminus \{p\}$ や $W^u(p) \setminus \{p\}$ のそれぞれの連結成分には軌道に関する自然な向きが入ります（図 1(1)）．点 q を含む $W^u(p)$ の部分区間を I とすると，任意の $k > 0$ について $f^k(I)$ と $W^s(p)$ は点 $f^k(q)$ で横断的に交わります（図 1(2)）．k を大きくすると $f^k(q)$ は p に漸近し，$f^k(I)$ もまた $W^u(p)$ に漸近します*5)（図 1(2)）．このことから $W^u(p)$ は何度も折り畳まれた形をしていることがわかります．

今度は q を含む $W^s(p)$ の部分区間 J をとります．l を大きくすると $f^{-l}(J)$ は $W^s(p)$ に漸近し（図 1(3)），その結果 $f^k(I)$ と $f^{-l}(J)$ によって p の近傍では，目が細かい網の目が形成され巨大な数のホモクリニック点が発生します！ これらのことから $W^s(p)$ と $W^u(p)$ はそれぞれ折り畳みを繰り返し，複雑な模様（ホモクリニックタングルと言う）を形成します（図 1(4)）．ポアンカレは文献 6) の 33 章の中でホモクリニックタングルは「もう一度描こうと思わないほどの複雑さである」と表現しています*6)．

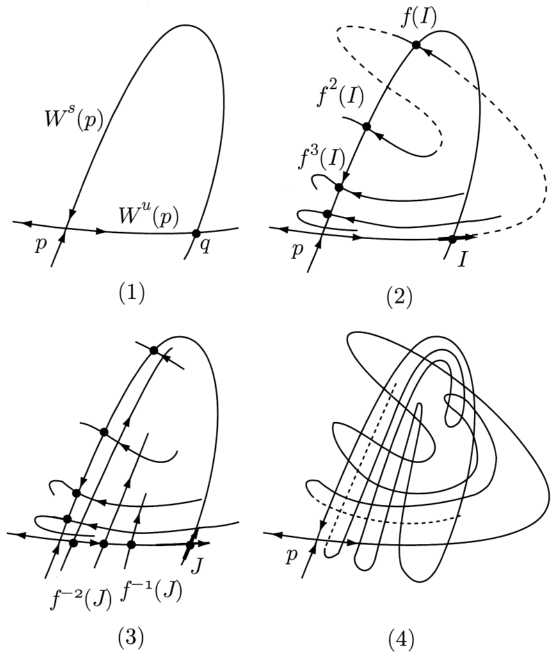


図 1　(1) 横断的ホモクリニック点 q，(4) ホモクリニックタングル．

5. 初期値に関する敏感な依存性

ポアンカレは『科学と方法』8) の 4 章で「ごく小さい原因が重大な結果を引き起こすことがある．このようなときに我々はその結果は偶然に起こったという」と述べています．この性質“原因（初期値）をわずかに変えただけで，全く異なる結果（軌道）になること”は今日，力学系分野では初期値に関する敏感な依存性と呼ばれています．文献 8) の中でポアンカレはこの性質をもつ具体例としてルーレットゲームを挙げ「ルーレットの針を回すときのわずかな力のいれ加減によって針が指す方向が変わり，それは賭金全部に関わるものであり重大この上もない」と語っています．他にも気象の長期予測の難しさを挙げ，気象の移り変わりは初期条件に強く依存し，天気を予測するために初期条件を誤差なく測定することは極めて困難であることを指摘しています*7)．

*4)　この主張は安定多様体定理から従う．この定理については例えば文献 4) を参照のこと．

*5)　これは λ-lemma あるいは傾き補題と呼ばれる主張から従う．例えば文献 4) を参照のこと．

*6)　しかし文献 6) の 33 章の中には複雑なホモクリニックタングルの図はない．

*7)　1960 年代，エドワード・ローレンツ（1917–2008）は気象の長期予測の研究からある微分方程式の解を数値的に調べ，今日ではローレンツ・アトラクターと呼ばれる解を発見する．この解は初期値に関する敏感な依存性を持っており解の長期予測は不可能であることを示していた．この事実に基づき，ローレンツは気象の長期予測の限界を原理的に明確に示した．ローレンツがどのようにしてこのような解を発見したかについては文献 12) を参照せよ．

ホモクリニック現象には初期値に関する敏感な依存性があることを，もちろんポアンカレは知っていたでしょう．4 章で考察したように，双曲型不動点の近傍では無数のホモクリニック軌道が存在します．ホモクリニックタングルによる複雑な模様を思い出すと，2 つのホモクリニック点が非常に近くに存在したとしても，それらの軌道はいずれ大きく離れていきます．これこそがポアンカレが 3 体問題に挑戦していた頃に見た現象であり，これが意味することは 3 体問題の解を明示的に表すことは不可能であるということでした．システムは決定論的なのに決して解を予測できない——これは当時の常識に大きく反していました．ポアンカレは自分の発見に非常に驚き，戸惑いを覚えたに違いありません．

その後，横断的ホモクリニック点が存在すれば無限個の周期軌道が存在することがバーコフによって示されますが[3)]，ホモクリニック現象を完全に理解することに成功したのはポアンカレが発見してから約 70 年後に力学系理論に登場したスティーヴン・スメール（1930–）でした．

6. 馬蹄写像とコイン投げ

1960 年にスメールが発見した馬蹄写像を紹介します[*8)]．平面上に長方形 $abcd$ をとりこれを R とします．馬蹄写像 H は R を図 2 のように移す写像です．具体的には R の横と縦の長さを一定の率で伸縮してでき上がった細長い長方形を折り畳み，R と重ねることによって H は定義されます．図 2 (1) で陰をつけた部分は，時刻 1 で R に属している点の集合を表しています．R 内の H による最大の不変集合 Λ に注目しましょう．Λ は任意の $n \in \mathbb{Z}$ について $H^n(x) \in R$ を満たす点 $x(\in R)$ 全体です．スメールの偉大な発見，それは H の Λ への制限は記号力学系の言葉で記述されるということでした．

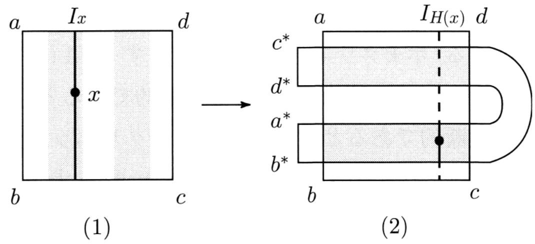


図 2　馬蹄写像（a の移った先を a^* などと表す）．

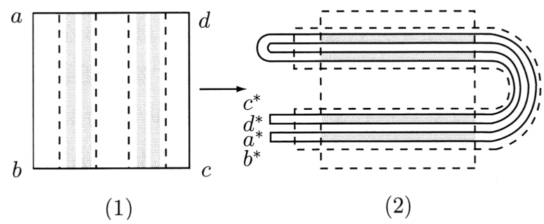


図 3　馬蹄写像の合成写像 H^2．

スメールは，その事実をコイン投げを使って説明しています[14)]．各時刻 $n > 0$ ごとにコインを投げ，表が出たら heads($\mathcal{H}$)，裏が出たら tails($\mathcal{T}$) を記録する実験をします．コイン投げは初期値鋭敏性を持つ力学系の代表例です．コイン投げ実験一回につき，$\mathcal{H}$ と $\mathcal{T}$ の片側無限列

$$s = (s_1 s_2 \cdots), \quad (s_j \in \{\mathcal{H}, \mathcal{T}\})$$

が得られます．実験で得られるすべての片側無限列の集合は H による R 内の力学系を記述します．実際 $x \in R$ を任意の時刻 $n > 0$ について $H^n(x) \in R$ を満たす点とするとき，$H^n(x)$ が R の上半分 $R_{\mathcal{H}}$ に属しているときには $i_n = \mathcal{H}$，R の下半分 $R_{\mathcal{T}}$ に属しているときには $i_n = \mathcal{T}$ と定めることによって，x の旅程と呼ばれる片側無限列

$$i_+(x) = (i_1 i_2 \cdots), \quad (i_j \in \{\mathcal{H}, \mathcal{T}\})$$

が得られます．時刻 1 で R に属している点の集合は図 2 (1) で陰をつけた 2 つの長方形です．時刻 1 と 2 で R に属している点の集合は図 3 (1) で陰をつけた 4 つの長方形です．図 2 (1) のそれぞれの長方形は，図 3 (1) の 2 つの長方形を含んでいます．この考えを進めれば，時刻 n までの間 R

*8)　文献 9) の 2 章でスメールは力学系を研究し始めたいきさつについて述べている．スメールはブラジルの IMPA に滞在中に馬蹄写像を発見したがその頃のエピソードについては文献 9, 14) を参照せよ．

に属している点の集合は R 内の 2^n 個の長方形となります．これらのことから任意の時刻 $n>0$ において R 内に属している点の集合は，カントール集合と区間の直積になることがわかります．これよりコイン投げから得られる任意の列 s に対し，s を旅程として持つような $x \in R$ が存在し，さらに $x, y \in R$ が同じ旅程を持つ必要十分条件は $I_x = I_y$ であることが従います．ここで I_x は R 内の x を通る垂直な線分です（図 2(1)）．つまり馬蹄写像はコイン投げと同じくらい予測不可能な力学系ということになります．

コイン投げの考察を定式化しましょう．Σ を 0 と 1 からなる両側無限列 $s = (\cdots s_{-1}s_0|s_1\cdots)$ の全体とします．ここでは s の時刻 0 での状態を明示するために，時刻 0 の状態の後ろに記号 | を入れて表しています．Σ に次のような距離を導入します．

$$d(s,t) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \frac{|s_i - t_i|}{2^{|i|}}, \text{ ここで}$$
$$s = (\cdots s_0|s_1\cdots), \quad t = (\cdots t_0|t_1\cdots).$$

各 $s = (\cdots s_0|s_1\cdots)$ の記号 | を1つ右にずらす写像を $\sigma : \Sigma \to \Sigma$ と表します．写像 $i : \Lambda \to \Sigma$ を次で定めます．$i(x) = (\cdots i_0|i_1\cdots)$ とおくと

$$i_n = \begin{cases} 1 & (H^n(x) \in R_{\mathcal{H}} \text{ のとき}), \\ 0 & (H^n(x) \in R_{\mathcal{T}} \text{ のとき}). \end{cases}$$

定理 6.1（スメール[13]） $i : \Lambda \to \Sigma$ は同相写像である．さらに $i \circ H|_\Lambda = \sigma \circ i$ が成り立つ．

$\sigma : \Sigma \to \Sigma$ の周期点全体は Σ で稠密であり，さらに Σ で稠密な軌道を持つことがわかりますが，これらの性質は定理 6.1 より $H|_\Lambda : \Lambda \to \Lambda$ に翻訳できます．

馬蹄写像は横断的ホモクリニック点を持ちます（図 4(1)）．逆に横断的ホモクリニック点が存在する力学系には馬蹄写像が“埋め込まれて”いるだろうか？ という自然な疑問が生じます．これはスメールが肯定的に解決し[13]，その主張は今日で

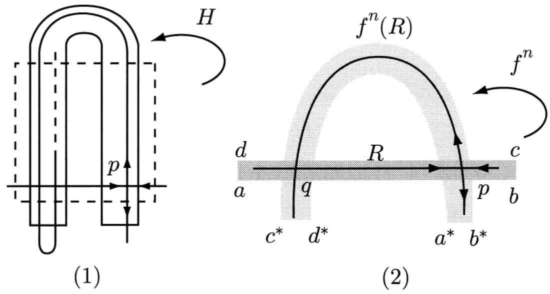


図 4 (1) 馬蹄写像の横断的ホモクリニック点，(2) 横断的ホモクリニック点から生じる馬蹄写像．

はポアンカレ–バーコフ–スメールの定理*9) と呼ばれています．こうして，馬蹄写像と記号力学系を結びつけたスメールのアイデアによってホモクリニック現象は完全に理解されたのです．

ポアンカレは『科学と方法』[8]の 3 章の中で次のように述べています．「研究に値する数学的事実とは，これまでに相互関係がないと誤って思われていた個々の内容に関して，思いもよらぬ深い関係があることを我々に啓示するような事実のことである．」

7. 最後の幾何定理

ジョージ・バーコフ（1884–1944）は 1905 年から 2 年間，学位を取得するためシカゴで学生生活を送りますが，その頃から既にポアンカレの論文や著作を熟読し，それらからインスピレーションを受けていました*10)．

ポアンカレの最後の論文『幾何の定理について』[7]が出版されたのはポアンカレの死の数週間前です．論文には次の主張が証明なしで与えられています．

ポアンカレの主張[7] 原点を中心とする半径 a と b $(a>b>0)$ の円周 C_a と C_b に囲まれる円環 A 上の同相写像 f が次の条件を持つと仮

*9) これは p と q を含む $W^s(p)$ の近傍 R を十分小さくとれば，ある $n>0$ が存在し R は f^n によって馬蹄型に移される（図 4(2) を参照）ということを使って示される．

*10) この辺りのことは文献 1) の Chapter 9 に詳しい記述がある．

定する．

1　f は面積を保つ（即ちどのような領域 U をとっても U と $f(U)$ の面積は等しい）．

2　f は A の境界成分を保ち（即ち $f(C_a)=C_a, f(C_b)=C_b$），f は C_a 上の点を時計方向に移し，C_b 上の点を時計と反対方向に移す．

このとき f は少なくとも 2 つの不動点を持つ．

上の 2 の条件は正確には次のように与えられます．

2　f は A の境界成分を保つ．さらに A の被覆 $\tilde{A}=\mathbb{R}\times[a,b]$ への持ち上げを $\tilde{f}:\tilde{A}\to\tilde{A}$ とし，$\tilde{f}$ の $\tilde{A}$ の境界成分への制限を

$$\tilde{f}(x,a)=(g(x),a),\quad \tilde{f}(x,b)=(h(x),b)$$

と表すと $(g(x)-x)(h(x)-x)<0$.

これはポアンカレが制限 3 体問題を記述する微分方程式から得られるポアンカレ写像について調べていたときに考えついた主張でした．ポアンカレは，もしも条件 1, 2 を持つ写像が不動点を一つ持てばもう一つの不動点が存在するということは証明していましたが，一つ目の不動点が存在するということの証明を完成できなかったのです．思うように研究が進展しないときは，考えが熟すまで問題から離れるのがよいことをポアンカレは知っていましたが，自分の年齢でそれができるかどうかは定かでないと考え，論文に次の文章を残しました[1,7]．「将来，この問題に興味を持つ有望な数学者が現れ，私が残したいくつかの結果を利用し，さらに発展させてくれることを望みます．」

ポアンカレの論文が出版された 1912 年，バーコフはプリンストンで研究していました．論文を手に入れて間もなく，バーコフはポアンカレの技法を習得し主張を証明することに見事に成功します．論文『ポアンカレの幾何定理の証明』[2)]が出版されたのはその翌年でした[*11)]．

1927 年に出版されたバーコフの著書『力学系』[3)]には，最後の幾何定理の一般化やビリヤード問題などの重要な問題への応用が述べられています．

*11)　現在ではポアンカレの主張は “最後の幾何定理”，“ポアンカレ–バーコフの定理” と呼ばれている．

参考文献

1) J. Barrow-Green, Poincaré and the Three Body Problem (*History of Mathematics Volume* **11**), *American Mathematical Society* (1997).
2) G.D. Birkhoff, Proof of Poincaré's geometric theorem, *Transactions of the American Mathematical Society* **14** (1913) 14–22.
3) G.D. Birkhoff, *Dynamical systems*, American Mathematical Society, Providence, R.I. (1927).
4) 國府寛司,『力学系の基礎』, 朝倉書店 (2000).
5) H. Poincaré, Sur le problème des trois corps et les équations de la dynamique, *Acta Mathematica* **13** (1890) 1–270.
6) H. Poincaré, *Les Methodes Nouvelles de la Mécanique Celeste*, Volume 1–3, Gauthier Villars, Paris. (1892), (1893), (1899);（第 3 部の日本語訳）福原満洲雄，浦太郎（訳），『ポアンカレ 常微分方程式—天体力学の新しい方法—』，共立出版 (1970).
7) H. Poincaré, Sur un théorème de géométrie, *Rendiconti del Circolo mathematico di Palermo* **33** (1912) 375–407.
8) H. ポアンカレ（著），吉田洋一（訳），『科学と方法』，岩波文庫 (1953).
9) R. エイブラハム，Y. ウエダ（著），稲垣耕作，赤松則男（訳），『カオスはこうして発見された』，共立出版 (2002).
10) F. ディアク，P. ホームズ（著），吉田春夫（訳），『天体力学のパイオニアたち（上）（下）—カオスと安定性をめぐる人物史』，シュプリンガー・ジャパン (2004).
11) P. Holmes, Poincaré, celestial mechanics, dynamical-systems theory and “chaos”, *Physics Reports* **193**, No.3 (1990) 137–163.
12) E.N. ローレンツ（著），杉山勝，杉山智子（訳），『ローレンツ カオスのエッセンス』，共立出版 (1997).
13) S. Smale, Differentiable dynamical systems, *Bulletin of the American Mathematical Society* **73** (1967) 747–817.
14) S. Smale, Finding a horseshoe on the beaches of Rio, *The Mathematical Intelligencer* **20** No.1 (1998) 39–44.

（きん・えいこ，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

ポアンカレと位相幾何学

下手にえがかれた図形についての上手な推論



佐藤　肇

1. はじめに

ポアンカレはほとんど *ex nihilo*（無から）**位相幾何学**（トポロジー）を作りあげ確立した．その分野は，19 世紀末から 100 年と少しの間に数学の中心となり，異常ともいえる急激な発展をとげて一応の結論まで到達したといえる．長い人類の歴史の中でも，一つの学問でこれだけの短期間に進展と解決を見た例は，他には見当たらないのではなかろうか？

多様体という概念を，3 次元空間の中に埋め込まれた曲面の高次元の拡張として，距離空間であり関数の定義される舞台であるというガウス，リーマンの考え方が持つ 2 つのしがらみから解放し，位相幾何的構造のみを抽象して定義したのもポアンカレの重要な仕事である．

微分方程式の対称性を考えるためのリーによる連続群の概念が，シュヴァレーによって**リー群**として定式化され，表現論，代数群，有限群などの理論の 20 世紀における大発展の基礎になったのも，ポアンカレによる多様体の概念の存在によるところが大きい．

ポアンカレの位相幾何に関する主な論文は 6 編あり，それらの論文のタイトルには皆 **analysis situs**（位置解析）という言葉が含まれている．これらはペーパーバック[1]になっている．そのうちの 4 編は，みずからをポアンカレ・マニアと呼んだ数理物理学者の故斎藤利弥先生の翻訳[2]（貴重な労作）が出版されている．

これらの内容を次節以降で紹介しよう．それらはほとんど，教養課程を終えた専門課程の学生に対する，多様体の位相幾何の現代の数学講義に等しいものとなる（それだけポアンカレの論文は学問の 1 分野の確立の完成点に近い）．

ちなみに，これは，微分幾何の講義に対する，ポアンカレの 15 年後に生まれた E. カルタンの立ち位置とは全く対照的である．ポアンカレ[3]などの少数の理解者以外には，カルタンの仕事はあまり評価されない時代が続き，現代においても，カルタンの幾何学の斬新な方法は十分に理解されきれていない．従って，現代の微分幾何講義はまだカルタンの仕事に追いついていないといえる．

これから多様体の位相幾何の授業を受ける人も受けない人も，授業のあらすじ（廉価版）のつもりで，この小論を読みながして頂けませんか．

2. 多様体

2.1 多様体の第一の定義

位置解析の最初の論文の第 1 節は，多様体の定義からはじまる．

次で表される p 個の等式と q 個の不等式を満たす点の集合（空集合でないとする）を $\boldsymbol{(n-p)}$ **次元多様体**という．ただし，F_i, φ_j は n 次元空間上の微分可能関数で，$p \times n$ 行列 $\left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\right)$ の階数は p に等しいとする（非退化条件）．

多様体の定義式

$$\begin{cases} F_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ F_p(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0, \\ \varphi_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0, \\ \cdots\cdots\cdots \\ \varphi_q(x_1, x_2, \cdots, x_n) > 0, \end{cases}$$

例えば $n = 3$ の場合などは，簡単に理解できる．$n = 3$, $p = 1$, $q = 0$ ならば曲面を定め，$F_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ ならば，多様体は半径 1 の球面である．$n{=}3$, $p{=}0$ ならば，多様体は 3 次元の領域となる．

この後，領域を（微分）同相写像による貼り付けで構成する多様体の第二の定義が与えられる．現代の講義では，第二の定義から出発するのが普通である．ホイットニーの結果などから，これらの 2 つの定義は同等になるのであるが，直観的にわかりやすい第一の定義で多様体の意味を理解するのが，まず大事である．

2.2 同相写像

第二の定義では（微分）同相写像の概念が基本的である．n 次元空間内の 2 つの多様体 V と V' が，

$$V = \{F_i = 0\ (1 \leq i \leq p), \varphi_j > 0\ (1 \leq j \leq q)\},$$
$$V' = \{F'_i = 0\ (1 \leq i \leq p'), \varphi'_j > 0\ (1 \leq j \leq q')\}$$

と与えられているとする．領域

$$D := \{\epsilon > F_i > -\epsilon\ (\forall i),\ \varphi_j > 0\ (\forall j)\}$$

は V の一つの近傍である．D で定義された n 個の n 変数微分可能関数の n 個の組

$$x'_k = \psi_k(x_1, x_2, \cdots, x_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

で定義される写像が，1 対 1 写像であり，V を V' に全射に写し，そのヤコビ行列式が決して 0 にならないとき，関数の組 $\psi = (\psi_1, \cdots, \psi_n)$ を V から V' への**同相写像**，正確には**微分同相写像**という．このとき，逆写像

$$x_k = \phi_k(x'_1, x'_2, \cdots, x'_n) \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$$

も V' から V への（微分）同相写像である．位置解析（analysis situs），すなわち今の言葉で**位相幾何学**（**topology**）は，同相写像で不変な性質を研究する学問である．

2.3 多様体の第二の定義

第二の定義は，第一の定義を拡張して，第一の定義の多様体を含む，より広いものとして与えられる．第一の定義の多様体は，1 個の n 次元空間の中に含まれて定義されていた．今，それぞれの n 次元空間にふくまれている，第一の定義の 2 つの m 次元多様体 V, V' があるとする．さらに，いくつかの不等式で制限される V および V' の開集合 U および U' がそれぞれ存在して，U と U' が微分同相であるとする．そのとき，U と U' を同じものと考え貼り合わせて，V と V' とで 1 つの多様体を定めるとする．これを何回か繰り返してつくられるものを多様体と考えるのが，**多様体の第二の定義**である．このようにして得られた多様体は，第一の定義より（形式的には）広い．このように定義すると多様体の構成の仕方の自由度が格段に大きくなる．しかし前に述べたように，このように構成されたものも，大きい次元の 1 個の空間の中で実現され，第一の定義の多様体とみることができることが後になって証明された．

3. ホモロジーとベッチ数

多様体を位相的に分類するための手段として，第一の論文でホモロジーが導入された．

それまでの関連する数学的量は，オイラーの導入した，頂点，稜，面の個数の関係だけであったのに，このようなホモロジーという思考への飛躍は，全く信じがたい思いがする．微分方程式への応用を目的の一つとした理論構成といわれるが，ポアンカレの頭の中で，どのような実体が見えていたのだろうか．主に考えていたのは，3 次元多様体という気がしないでもない．

ポアンカレの最初の定義では，p 次元の多様体の中で，q 次元のいくつかの多様体 v_i の「和」が $q+1$ 次元の多様体の境界であるとき，

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_k \sim 0$$

として，ホモロジーの関係を定め，ねじれ元でない，自由で独立な元の個数を q 次元の**ベッチ数**と呼んだ．これは，今でいうコボルディズム（同境類）に近いものである．

その後，ヘーゴールによる自由でないねじれ元のホモロジーの元の取扱いに対する批判などを受けて，第2の「位置解析への補足」を書いて三角形分割による単体的複体としての定義を採用するようになった．ここで，分割を与える**三角形**は，一般次元の三角形を考える．例えば，3次元の三角形とは，四面体のことである．**単体的複体**とは，一般次元の三角形が集まってできる集合体である．

ポアンカレ自身の書き方は，はっきりとはしないが，三角形とは限らないセルを考えてもいるようであるが，本質的には同じである．**セル**とは，一般次元の三角形と位相同型な単体的複体のことである．

オイラーの扱った頂点，稜，面の個数の交代和を，m 次元の多様体の三角形分割の各次元の三角形の個数の交代和と拡張して考え，それを，ベッチ数の交代和と等しいことを示して，位相不変であることを示した．今では，これは**オイラー–ポアンカレ標数**と呼ばれている．

このようにして，交代和を取り，不変量を得るという考え方が20世紀の数学の底を流れる基調であったのではないかと思う．これに対して，21世紀の最初は，各次元のベッチ数を多項式の係数として定義する（これも**ポアンカレ多項式**と名前が付いているが）級数およびその拡張の研究が主流になるかもしれない．

オイラー–ポアンカレ標数の定義は，暗黙のうちに**三角形分割の存在と一意性**を仮定していた．

（ポアンカレの扱った）微分可能多様体の微分構造に合った三角形分割の存在と一意性は，後にホワイトヘッド等により示されたが，ポアンカレはそれは当り前と思っていたのだろう．ホモロジー群は，一般的な空間でホモトピー型にしかよらない定義も後に与えられたから，オイラー–ポアンカレ標数の位相不変の定理は，三角形分割の存在と一意性を用いないでも示すことができる．

4. 交わり数

第一の論文で，多様体の定義のあと，それが，連結と非連結かを区別し，さらに，任意の2つの貼り合わせ部分で座標変換のヤコビアンが正であるような座標を取ることができる両面的（**向き付け可能**）多様体と，そうではない一面的（**向き付け不可能**）多様体の定義を与えた．両面的な例として，多様体の第一の定義の n 次元空間での $n-1$ 次元の多様体，一面的な例としてメビウスの帯をあげている．

ある m 次元多様体 W の中の i 次元多様体 V と $m-i$ 次元多様体 V' に対しその交点での符号を定義して，その和 $N(V, V')$ を**交差数**と呼び，それが，W, V, V' がすべて両面的ならば，位相不変な量であることを示した．さらにそれは，V や V' をそれぞれホモロジーの関係で取り換えても，値が変わらないことを示した．これから，次も従う．

定理． 両面的な閉多様体 W の中で，両面的な閉多様体の和 $\sum_j V_j$ に対し，両面的な閉多様体 V で交差数 $N(V, \sum_j V_j)$ が正となるものが存在するためには，$\sum_j V_j$ が ~ 0 であってはならない．

この交差数の考え方は，後にコホモロジーのカップ積として整備され，代数的位相幾何の主要技法となった．

5. 双対性

交差数の考えを発展させ，多様体のベッチ数に関して，ポアンカレは次を得て，基本定理と呼んだ．

定理． 両面的な m 次元閉多様体の i 次元ベッチ数と $m-i$ 次元ベッチ数は等しい．

この証明として，**双対多面体**と呼ばれる幾何学的構成を使うのが明解である．

m 次元の多様体を三角形分割して，この多様体

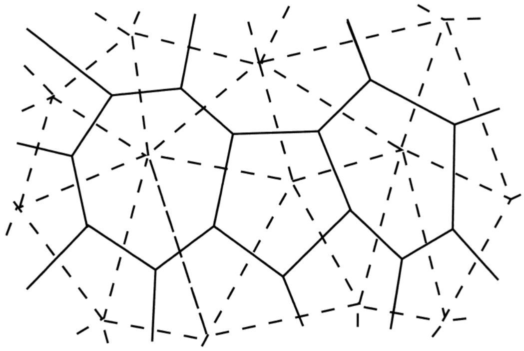


図 1　双対分割.

と位相同型な多面体を考える．そのすべての次元の三角形の重心をとり，その重心を結ぶと，それは，重心を頂点とするセルによる多様体のセル分割を与える．これを双対多面体による双対分割と呼ぶ（図 1）．

そのとき，それぞれの i 次元の三角形に対し，その重心を含む $m-i$ 次元の横断的なセルがただ 1 つ存在する．この三角形と横断的なセルの対応は，ホモロジーの情報を対応させるから，ベッチ数の同型を与えることがわかり，定理が証明される．

実際は，双対セルは，コホモロジーを定義する（ポアンカレはコホモロジーを明確には定義しなかった）．この定理は，（ベッチ数のみならずねじれ元の情報を含めた）i 次元のホモロジーと $m-i$ 次元のコホモロジーの同型を与えている定理とみなすことができて，向き付け可能閉多様体に関する**ポアンカレの双対定理**と呼ばれている．

6. 基本群

微分方程式の解が，空間でのある道を通ってもどって来ると，異なった関数になることを知っていたポアンカレは，それが空間の位相幾何的量に依存していることに気づいた．“閉路の集合にホモトピーによる同値関係をいれると，その同値類全体は，位相不変な量になる” という今では当り前のことも，初めてこのような概念を導入することは革新的なことであった．保型関数への親炙がこの発見の助けにもなったのではないかと推察される．この同値類は，関数の空間などに変換群として実現されることから，群と考えられ（この時代は，群は作用される対象との組で理解されるのが常であった），**基本群**と名付けられた．基本群が単位群と同型となる場合，その空間を**単連結**と名付けた．

2 次元閉多様体の位相は，基本群またはホモロジー群で決定されることを知っていたポアンカレは，最初の位置解析の論文では，3 次元閉多様体の位相も，このどちらかで決定されるのか，いろいろ思い悩んでいる様子が感じられる書き方をしている．

7. ポアンカレ球面

基本群が，位相不変の必要条件であることを知っていたにもかかわらず，ポアンカレは，第三の論文（位置解析への第二の補足）の末尾に，次の定理をアナウンスした．それは

> 球面とホモロジー群が等しい両面的な閉多様体は球面と同相である

というものである．証明は，議論を展開する必要があり，この論文が長くなりすぎないようにするため，後の論文になるとのことであった．

しかし，4 年後に出版された「位置解析への第五の補足」の論文で，逆の結果を示した．すなわち，球面とホモロジー群が等しい両面的な 3 次元閉多様体で，単連結でない，従って球面とは同相でないものを作ってみせたのである．

この 3 次元多様体は，**ポアンカレ ホモロジー球面**と呼ばれ，特異点論，離散群論などと関係して，本質的に重要なものであることがその後判明した．基本群はリー群 $SU(2)$ の位数 120 の**二重正二十面体群**と呼ばれる離散部分群である．実際，このホモロジー球面は，標準球面を，基本群で割ったもので，正の定曲率をもつ計量が入る，このように商を取ると，一般にはホモロジー群は変化するが，この場合には，商空間のホモロジー群が，球面

と全く同じになっているという珍しいものである．

この多様体構成は，その後いろいろな方法が与えられたが，ポアンカレの作り方は次のようなものである．

フルダブルトーラス（中の詰まった２人乗りの浮き袋）２個を用意し，その境界を微分同相 φ で同一視して多様体を与える．そのような微分同相 φ は，２人乗りの浮き袋の１次元のホモロジー群 $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ の自己同型群 $GL(4, \mathbb{Z})$ の元 ρ に依存して定まる．適当な ρ を選ぶことで，求める多様体を得ることができる．

8. ポアンカレ予想

上のようなホモロジー球面の存在に気づいたポアンカレは，結局

> 「閉じた単連結な３次元多様体で，球面に同相でないものが存在するであろうか？」

という問題にたどり着いた．論文の最後は，

> 「この問題は，われわれをあまりにも遠くへ連れ去ることであろう」

という文章で，その問題の宏大さ，奥行の深さを予言した．

ポアンカレは，単連結なら同相になるだろうという予想の形では述べなかったが，常に同相になるという形で**ポアンカレ予想**と呼ばれるようになり，非常にたくさんの数学者の苦闘の対象となった．

9. おわりに

ポアンカレは多様体を微分可能構造をもつものとして定義したが，微分可能を仮定しない位相同型写像のみを用いても定義され，**位相多様体**と呼ばれる．

> 「すべての位相多様体は三角形分割可能か」

という**三角形分割問題**と，

> 「２つの三角形分割は共通の細分を持つだろう」

という**位相幾何の基本予想**の証明が残され，20 世紀後半の位相幾何の中心問題となり，美しい形の解決（成立する場合と不成立の場合の決定）で終わった．これについては，文献 2) の付録の松本幸夫さんの解説「基本予想・三角形分割問題・ポアンカレ予想」，または文献 4) などを参照されたい．

ポアンカレ予想はさまざまなドラマの後に結局ペレルマンにより肯定的に解決されたことは皆さん良くご存じであろう．

ポアンカレが自分自身の仕事を解説した文章に次がある．

> 「幾何学は下手にえがかれた図形について正しい推論を行うための技術であるが，ただし一つの条件の下においてである．図形の各部分の比率は大ざっぱに変えられてもかまわない．しかし，図形の構成要素の位置がいれかえられてはならず，それの相対的位置は保たれていなければいけない．いいかえると，定量的な特性は問題にされていないが，定性的な特性は尊重されなければいけない．位置解析が問題にするのはまさにそのことなのである．……しかしながら科学のこの分野は今までほとんど研究されていなかった．」

まさしくそのとおりで，この文章は簡潔に位置解析（位相幾何）の内容とその時代の状況を的確に述べている．学問の創造者はその先までも見ていた．

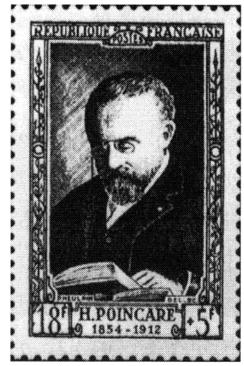
この小論では，ポアンカレの論文の訳は，斎藤先生の文献 2) をそのまま使わせて頂いた．

参考文献

1) H. Poincaré, Analysis Situs (Topologie), Collected Vol VI, Editions Jacques Gabay, 1996.
2) ポアンカレ著，斎藤利弥訳，数学史叢書『ポアンカレトポロジー』，朝倉書店，1996.
3) H. Poincaré, Rapport sur les travaux de M. Cartan, Poincaré in memoriam 1921, 137–145.
4) A.A. Ranicki, A.J. Casson, D.P. Sullivan, M.A. Armstrong, C.P. Rourke, G.E. Cooke, "The Hauptvermutung Book: A Collection of Papers on the Topology of Manifolds", Kluwer Academic Publishers, 1996, available on web.

（さとう・はじめ，名古屋大学名誉教授）

ポアンカレ予想とペレルマン



塩谷　隆

100年来の大問題であったポアンカレ予想が，ロシア人数学者グリゴリー・ペレルマン（Grigori Perelman, 1966年ロシア生）によって解決された．これは1904年にポアンカレによって提出され，以後，位相幾何学における最も中心的な問題として研究されてきた（本特集の佐藤肇氏の記事を参照のこと）．2006年8月に，この功績に対してペレルマンにフィールズ賞が贈られたが本人は辞退した，という話は新聞などの報道でご存知の方も多いと思う．

ポアンカレ予想とは，3次元の曲がった空間（3次元多様体）の形に関する予想で，「単連結な3次元閉多様体は3次元球面に同相であろう」というものである．我々の住む3次元空間の中の曲面は2次元多様体であり，これは実際に図示できるので簡単であるが，これが3次元多様体となると，その全体像を図に描くことはできないので直観が通じにくい．そのため，多くの専門家の長年の研究にも関わらず，非常に困難な問題とされてきた．位相幾何学の究極の目標は，「多様体の形をすべて列挙したリストを作りたい」ということに尽きる．そのための一つの重要なステップがポアンカレ予想であった．しかし，ペレルマンはポアンカレ予想のみならず，3次元多様体に対して一足飛びにこの究極目標を達成したと主張している．正確にはサーストンが予想した「幾何化予想」というものの証明を発表した．

ペレルマンによるポアンカレ予想，幾何化予想の証明は位相幾何学というよりは，解析学および微分幾何学的手法による．より具体的にはリッチフローというものを使っている．これは微分方程式を使って多様体の形を分かりやすい形（曲率が一定など）に変形する方法である．リッチフローの微分方程式を以下に書いてみよう．

$$\frac{d}{dt}g_{ij}(t) = -2R_{ij}(t).$$

ここで，t は時刻のパラメータで，$g_{ij}(t)$ はリーマン計量と呼ばれ，多様体の精密な形を規定するような多様体上の関数である．$R_{ij}(t)$ は $g_{ij}(t)$ から決まるリッチ曲率テンソルと呼ばれるもので，多様体の曲がり具合を表す量である．最初に多様体上にリーマン計量 $g_{ij}(0)$ があったときに，上の微分方程式に従って，時刻 $t=0$ のとき $g_{ij}(0)$ であったものが変形していって，時刻 $t>0$ において $g_{ij}(t)$ が決まる．この仕組みのことをリッチフローと呼ぶ．このとき，その変形の方向やスピードが多様体の場所によって異なるが，それをリッチ曲率で制御しているのである．

3次元閉多様体があったとする．それをリッチフローにより変形していくと，多様体が部分的にくびれる現象が起こる．そこからさらに，リッチフローにより変形すると，そのくびれた部分がつぶれてしまい，それ以上変形できなくなってしまう．そのくびれた部分で多様体を2つに切断して，それぞれの切断面にキャップをつけると新しい多様体ができるが，これについてまたリッチフローを考える．ここで切断してキャップをつけると2つ

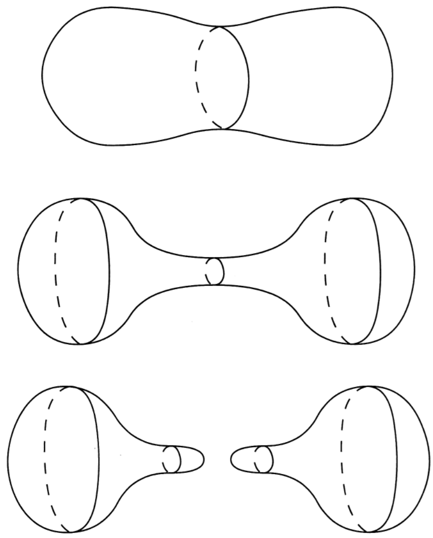


図1　手術つきリッチフロー．

に分かれることもあるが，その場合はそれぞれの多様体についてリッチフローを考える．そしてまたくびれた部分ができれば，同じことを繰り返す．この手続きを**手術つきリッチフロー**（Ricci flow with surgery）と呼ぶ（図1）．

ペレルマンは手術つきリッチフローで変形していくと，有限時間のうちに分かりやすいものになってしまうことを示し，ポアンカレ予想と幾何化予想を証明した．こうして見ると簡単そうに思われるかも知れないが，実際には非常に難しく，様々な新しいアイディアを生み出すことによって，ようやく可能となった．証明の検証に何年もかかったことが，いかに難しいかを物語っている．

ポアンカレ予想の証明については，詳細な解説が文献3) にあり，正しいと認知されている．より一般の幾何化予想の証明については，文献1, 2) に解説はあるが，まだ懐疑的な意見も見られる．一部で，著者と筑波大学の山口孝男氏が共同で証明した定理を使うが，これは完全に正しいのでご安心を．

「ポアンカレ予想が解けて何の役に立つんですか？」とよく聞かれるのだが，正直なところ答えに困ってしまう．直接的な大きな応用があるかというと，「明確に言えるものはない」というのが正確なところだろう．アンリ・ポアンカレはホモロジー論を含む位相幾何学の基礎を築いたが，ポアンカレ予想はその過程で現れた素朴な疑問の一つに過ぎなかった．たまたま解くのが難しかったためにミステリアスな魅力から人々を引き付け，位相幾何学の象徴として研究の活性化に役立ってきた．ペレルマンの証明の方法は，幾何学において非常に強力な研究手段を与えた．現にその方法を応用して様々な研究が進みつつある．ポアンカレ予想そのものよりも，その証明の過程で得られたテクニックが貴重なのである．研究と言うと華々しいことばかりが注目されがちだが，このように地味なところが本当は大事なのである．

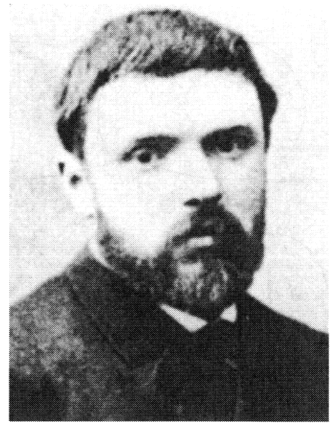
これから幾何学を勉強したいという人のために文献を挙げておこう．位相幾何学の入門書として文献7) を，微分幾何学の入門書としては文献8) を挙げておく．多様体とリーマン幾何学の本として文献9, 10) を挙げる．これらをある程度習得すれば，ペレルマンの証明を解説した文献3) を読むのはそれほど難しくはないと思う．

参考文献

1) H.-D. Cao and X.-P. Zhu, *Hamilton-Perelman's Proof of the Poincaré Conjecture and the Geometrization Conjecture*, 2006.
2) B. Kleiner and J. Lott, *Notes on Perelman's papers*, 2006.
3) J.W. Morgan and G. Tian, *Ricci Flow and the Poincaré Conjecture*, Clay Mathematics Monographs 3, American Mathematical Society, Providence, RI; Clay Mathematics Institute, Cambridge, MA, 2007, xlii+521 pp.
4) G. Perelman, *The entropy formula for the Ricci flow and its geometric applications*, 2002.
5) G. Perelman, *Ricci flow with surgery on three-manifolds*, 2003.
6) G. Perelman, *Finite extinction time for the solutions to the Ricci flow on certain three-manifolds*, 2003.
7) 田村一郎，『トポロジー』，岩波書店．
8) 小林昭七，『曲線と曲面の微分幾何』，裳華房．
9) 松本幸夫，『多様体の基礎』，東京大学出版会．
10) 酒井　隆，『リーマン幾何学』，数学選書 11，裳華房．

（しおや・たかし，東北大学大学院理学研究科）

ポアンカレと天体力学



谷川　清隆

1. 天体の運動学

「天には物質は存在せず，これを仰いで見ると，…，青に見えるが，本当に青色のものがあるわけではなく，黒には見えるが，黒い実体があるわけではないのである．太陽や月，もろもろの星は，あるがままに何もない虚空のなかに浮かんで存在し，それらが運行するのも，静止するのも，すべて気によってなされる．…」これは中国古代の 3 種類の宇宙論，蓋天説，渾天説，宣夜説のうち，漢代に行われたという宣夜説の述べるところを一部，晋書天文志[1)]から抜き書きしたものである．「気」を「力」あるいは「場の作用」に置き換えれば，まるで現代の天文学の教科書から取ってきたような文章である．

春秋時代（紀元前 8 世紀–5 世紀）から清までの中国には専門の天文学者がいて，昼となく夜となく空を監視していた．中国では，日食や月食が観測され，五惑星の動きが注目され，また天文現象が記録された[2)]．古代中国とほぼ同時に，古代バビロニアで天文学が発達した．中国では日食が重要視されたが，バビロニアでは月食が重要視された．ヘレニズム時代にはヒッパルコスが（ロードス島で？），ローマ時代にはプトレマイオスがアレクサンドリアで観測および理論天文学を行った[3)]．

ヨーロッパの人々が天文学に興味を持たなかったことは，ローマ時代からルネッサンスまで，（ヨーロッパ本土に）天文学者と呼べる人がいないことからわかる．また，1582 年に至るまで暦を変えなかったことに表われている．10 日も季節がずれたら，中国では天文官の首が文字どおり飛ぶ．

ヨーロッパが天文学に興味を持ち始めるのはおそらくイスラムの影響である．8 世紀にイベリア半島にイスラム国家が建設され，その後，オスマントルコは東で勢力を延ばす．16 世紀には現在のスロバキアにまで版図を広げた．イスラムの高精度天文学は東ヨーロッパに進出したのである．西ヨーロッパでは，紀元 10 世紀以前はまれに，また 12 世紀あたりから日食観測史料が出始める[2)]．ただし，系統的ではなく，年代記などに食分の大きな印象的な日食が突発的に記録された．ロシアは東方の影響が大きく，紀元 1000 年ごろから系統的な記録が残っている．

こうして，中国やバビロニアで天体の運動学が研究され，アレキサンドリアを経て，イスラム天文学に至り，天の座標が整備され，観測機械の精度が向上した．イスラム天文学を受けた形で北ヨーロッパのコペルニクスやチコ・ブラーエ，ケプラーが天体の運動学の幾何学的表現を完成させたと思われる．それに遠隔力が導入されて天体力学へと昇華されたのであると，理解できる[4)]．ニュートンは力の概念を数式（運動方程式）の中に取り込むことに成功した．

2000 年以上，天体運動学であった天文学に 17 世紀後半から，天体力学が加わった．そして学問の主役は技術革新とともにヨーロッパに移った．

2. 天体力学

ニュートンの『プリンキピア』[5)]のほぼ冒頭に運動の三法則が書かれている．第二法則は例の $\boldsymbol{F} = m\boldsymbol{a}$ である．その後で，万有引力の法則がケプラーの法則から導かれる．逆自乗法則と運動方程式，この2つがその後の流れの源流だ．

流れの一つは天体力学である．2000年以上の運動学の積み重ねを踏まえ，ケプラーの法則，万有引力の法則と下ってきた．望遠鏡発明以来観測精度の上がった日月惑星運動を解き，予測することが目的である．それぞれの惑星は太陽の周りを独立に回るとして楕円運動を考える．次に他の惑星の影響を摂動として入れる．ラグランジュやラプラスはこのような摂動論を開発し，万有引力の法則が正しいことを確認したはずである．とくに，ラプラスは，1次の摂動論により，「太陽系が安定」であることを証明した．その自信からか，いわゆる「ラプラスの魔」を考えた．われにすべての初期条件を与えよ，さすれば，未来のすべてを予言して見せよう，とニュートン力学の勝利宣言を行なった[6)]．ルベリエやアダムスは摂動計算により，海王星の位置を予想した．予想位置に海王星は発見された．これが1846年のことである．万有引力の法則は大いに成功した．

もう一つの流れは運動方程式そのものを対象とする．いわば，力学の基盤整備の方向である．ヨーロッパ本土の学者はこれに興味を持ち，素朴な運動方程式の哲学的基礎を考察した．運動は「作用」が最小になるような仕方で行われるとか，運動の最中は仮想仕事がゼロであるとか，いくつもの「原理」が提案された．最後は，ラグランジュが「ダランベールの原理」に基づき，変分法によってラグランジュの運動方程式を得た[7)]．「われらが世界は可能なもののうち最善の世界である」[8)]．力学の法則が汎関数の停留値を実現するものとして導き出されたことを，筆者はいつも不思議に思う．

この一般力学はニュートン以後，恐ろしいほどの速さで発展する．ラグランジュの「解析力学」は『プリンキピア』の100年後であり，150年後にはハミルトンの正準方程式に至ってしまう．正準変換が導入され，都合のよい，問題を解きやすい変数に移る手法が確立された．与えられた問題が最善の変数で記述されているとは限らない．だが最善の変数はあるはずである．ハミルトン・ヤコビ方程式が導入され，可積分へ至る道が示された．ただし，一般的解法はない．個々の問題に応じて変換の母関数を見付ける必要がある．こうして力学は形式的に完成の域に達してしまう．

力学の2つの流れは絡み合って進展した．互いに重力を及ぼす天体は最もまともな系であり，いつでも一般力学の手法のテストの対象となってきた．その天体力学において，19世紀後半，解けない問題が2つあった．一つは月の運動であり，もう一つは水星の近日点移動である．後者は一般相対論に関係してよく知られているので省略し，前者について説明しよう．月の運動は太陽からの摂動が強いため，低次の摂動論では観測を説明できない．それに加えて，「月の永年加速」と呼ばれる運動があった．月の公転運動の中に説明のできない加速運動があったのである．これは20世紀前半に地球自転が遅くなっていることが判明して解決されるまでずっと謎であった．

3. ポアンカレの貢献と懸賞問題スキャンダル

1885年，ミッターク・レフラーの提案により，スエーデンのオスカーII世60歳の誕生日を祝うために懸賞問題が出された．いくつかの分野で問題が出されたようだ．その中の n 体問題に関する問題「互いにニュートンの法則にしたがって引き合う任意の数の質点系が与えられたとき，どの2点も衝突しないとして，各質点の座標をある変数の級数の形で表現するよう努力せよ．その際，変数は時間の知られた関数であって，級数は一様収束すべきものである」にポアンカレは挑戦した[9)]．そしてポアンカレが第一等を獲得したことは有名である．

天体力学の摂動論では，二体問題から始め，小さな質量の摂動天体の影響を，変数変換によってどんどん高次に追いやり，いずれはうまい座標を見

つけて二体問題のように陽な形で解を表現することを目指した．これらの試みはうまくいくか．ポアンカレは当初，三体問題は解けると思っていた節がある．ポアンカレは，n 体問題の中で最も簡単な制限三体問題を考察の対象に選んだ．制限三体問題でだめなら，一般三体問題でもだめ．したがって一般 n 体問題でもだめ．あとの問題は前の問題を部分問題として含むからである．

賞の獲得にあたってスキャンダルがあったことは比較的よく知られている．いくつかの場所に書かれているからである[9]．そう思って，ポアンカレの懸賞論文の掲載されたアクタ・マセマティカ誌の第 13 巻を見ると，おかしなことが目につく[10]．1889 年 1 月の王の 60 歳誕生日には受賞が決まっているのに，印刷は 1890 年 12 月号でほぼ 2 年経過している．

懸賞論文には，今から考えて重要な結果が 2 つ証明されている．一つは，周期解の安定および不安定多様体が横断的に交わることである．スキャンダルはこれに関係する．初めに提出した論文では，横断的な交差はないとしてあったが，競争者に指摘されてポアンカレは必死に考えたらしい．そして逆に横断的交差することを示してしまったということだ．これによって三体問題が非可積分であることを示した．またカオス現象の発見である．これについては本特集の金英子氏の記事を参照されたい．

もう一つは次節で紹介する解析的非可積分性である．これの証明は論文のほぼ最後，22 節にあり，論文の最初の版にはなかったと想像する．積分可能であると思っているのにこの内容を載せるはずがない．知られている 10 個の代数積分以外に代数積分はないことを 1887 年に証明したブルンスの仕事に言及しているので，刺激を受けたと思われる．ただし，ポアンカレは「質量にも解析的に依存する積分」はないことを証明したのであって，特定の質量のときに可積分である可能性は残った．これは現代の課題である．

教科書『天体力学の新手法』[9]は上記論文を拡張したものである．

4. 三体問題の非可積分性

これは懸賞論文の II 部 III 章 22 節の内容である．ポアンカレは自由度 2, 制限三体問題において，質量（μ）にも解析的に依存する解析積分が存在しないことを証明した．

次のように進む[11]．$I=(I_1,I_2)$, $\theta=(\theta_1,\theta_2)$ を作用・角変数として，ハミルトン関数を微小パラメータ μ で展開する．

$$H=H_0(I)+\mu H_1(I,\theta)+\mu^2 H_2(I,\theta)+\cdots. \tag{1}$$

ここで，H_0 は I にしか依存せず，ヘシアンがゼロでない，つまり，$|\frac{\partial^2 H_0}{\partial I_i \partial I_j}|\neq 0$ なる解析関数である．積分 $\varPhi$ が存在するとして，それを μ のべきで展開する．

$$\varPhi=\varPhi_0(I,\theta)+\mu\varPhi_1(I,\theta)+\mu^2\varPhi_2(I,\theta)+\cdots. \tag{2}$$

$\varPhi_i$ は (I_i,θ_i) に関して解析的で，θ_1 と θ_2 に関して周期的とする．可積分のための必要十分条件，すなわち，ポアッソン括弧がゼロになること，

$$\{H,\varPhi\}\equiv\sum_{1,2}\left(\frac{\partial H}{\partial\theta_i}\frac{\partial\varPhi}{\partial I_i}-\frac{\partial H}{\partial I_i}\frac{\partial\varPhi}{\partial\theta_i}\right)=0, \tag{3}$$

も展開して，次数の低い 2 つだけ取り出す．

$$\{H_0,\varPhi_0\}=0,\quad \{H_1,\varPhi_0\}+\{H_0,\varPhi_1\}=0. \tag{4}$$

ポアンカレはまず，$\varPhi_0$ が H_0 の関数でないことを証明する．その証明のために，逆に $\varPhi_0$ が H_0 の関数であると仮定してみる．H_0 の偏微分はゼロでないとしたから，$H_0=$ 一定は I_i について解ける．それを $\varPhi_0$ の関数形に放りこむと，$\varPhi_0$ は H_0 の関数となる．このことから $\varPhi_0$ が H_0 の一価関数であることがわかる．その関係を $\varPhi_0=\psi(H_0)$ と書き，積分 $\varPhi-\psi(H)$ を新たに考える．これは μ に関しゼロ次の項を含まないから $\varPhi-\psi(H)=\mu\varPhi'$

と書け，$\Phi' = \Phi'_0 + \mu\Phi'_1 + \cdots$ と展開できるはずである．Φ'_0 が H_0 の関数でなければ，H_0 の関数でない積分が存在するということで証明は終わりである．Φ'_0 が H_0 の関数ならば，上と同じ議論を繰り返して $\Phi - \psi(H) - \mu\psi'(H) = \mu^2\Phi''$, $\Phi'' = \Phi''_0 + \mu\Phi''_1 + \cdots$ を構成する．この手続きが途中で終われば証明終わり．無限に続いた場合，Φ は H の関数となって独立な積分でない．だから証明終わり．

次に，Φ_0 が θ_1 も θ_2 も含まないことを示す． そのために，Φ_0 は θ_1 および θ_2 の周期関数であるから，これらの三角関数（指数関数）で展開する．

$$\Phi_0 = \sum_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2} e^{i(m_1\theta_1+m_2\theta_2)} \equiv \sum_{m_1,m_2} A_{m_1,m_2}\zeta.$$

係数は I を含む．H_0 は座標を含まないから，ポアッソン括弧を取ると

$$-\{H_0,\Phi_0\} = \frac{\partial H_0}{\partial I_1}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_1} + \frac{\partial H_0}{\partial I_2}\frac{\partial \Phi_0}{\partial \theta_2}.$$

これに $\partial\Phi_0/\partial\theta_i$ の表式を代入すると，各 m_1, m_2 に対して

$$A_{m_1,m_2}\left(m_1\frac{\partial H_0}{\partial I_1} + m_2\frac{\partial H_0}{\partial I_2}\right) = 0$$

が恒等的に成り立つ．2 つの因子のどちらかがゼロでなければならぬ．ところがヘシアンがゼロでないから，第二因子は $m_1 = m_2 = 0$ のとき以外はゼロにならない．これから $A_{0,0}$ 以外の A_{m_1,m_2} がすべてゼロであることが出る．すなわち，Φ_0 は座標を含まない．

次に式 (4) の 2 番目の条件を考える．展開 $H_1 = \sum_{m_1,m_2} B_{m_1,m_2}\zeta$, $\Phi_1 = \sum_{m_1,m_2} C_{m_1,m_2}\zeta$ を代入してポアッソン括弧を計算すると，前と同様，各 m_1, m_2 に対して

$$B_{m_1,m_2}\left(m_1\frac{\partial \Phi_0}{\partial I_1} + m_2\frac{\partial \Phi_0}{\partial I_2}\right) = C_{m_1,m_2}\left(m_1\frac{\partial H_0}{\partial I_1} + m_2\frac{\partial H_0}{\partial I_2}\right)$$

が得られる．これは至るところ成り立つから，

$$m_1\frac{\partial H_0}{\partial I_1} + m_2\frac{\partial H_0}{\partial I_2} = 0 \tag{5}$$

が成り立つところでは，左辺の因子のどちらかがゼロになる．第二因子がゼロならば，第一因子はゼロでなくてよい．B_{m_1,m_2} がゼロであるかないかは，ハミルトン関数を決めた段階で決まっている．そこで，まず B_{m_1,m_2} がどれひとつとしてゼロでない場合を考える．このとき $m_1\partial\Phi_0/\partial I_1 + m_2\partial\Phi_0/\partial I_2 = 0$ はゼロである．すると

$$\frac{\partial H_0/\partial I_1}{\partial \Phi_0/\partial I_1} = \frac{\partial H_0/\partial I_2}{\partial \Phi_0/\partial I_2}$$

が得られ，ヤコビ行列式 $\partial(H_0,\Phi_0)/\partial(I_1,I_2) = 0$ となる．尽数関係 (5) は無数の m_1, m_2 に対して生じるので，無数の場所でヤコビ行列式がゼロになり，解析性により Φ_0 は H_0 の関数となってしまう．これは前に示したことに矛盾する．

ポアンカレは，制限三体問題の場合に，尽数関係 (5) が成り立つときに比 m_1/m_2 の異なる 無数の B_{m_1,m_2} がゼロでないことを確認する．まとめると，式 (2) で表される積分 Φ は存在しない．

5. ほかの仕事

ポアンカレは，摂動論の教科書『天体力学講義』[12] を書いた．3 巻本である．最初の 2 巻は天体力学者向きであり，第 3 巻は潮汐理論である．日本およびおひざ元のフランスの摂動論専門家にインタビューしたところによると，かれらはこの本を読まない．わたし自身も先輩から譲り受けているけれども，この本には馴染みがない．

理由はと聞くと，あまり実用的ではないからだという．ティスランの教科書から，フォン・ツアイペル，米国のブラウン，ブラウワーとクレメンスへと進んで，ポアンカレを抜かしてしまうようだ．20 世紀後半になると，日本の堀源一郎による摂動論のための新しい変換理論が現れて，研究者は堀理論から始めればよくなってしまった．

正準変換論は，昔だったら山内恭彦の教科書『力学』，翻訳ものならゴールドシュタインの『力学』を見た．母関数を使う．母関数は古い変数の一方

と，新しい変数の一方を含んだ関数であって，いわば，2つの相空間をつなぐ関数である．変換は，母関数を偏微分することによって得られる．変換を求めるには，この偏微分を含む方程式を解く必要がある．堀摂動論の優れた点は，古い変数が新しい変数から直接得られることである．

ところで，当時のフランスの大学には面白い風習があった．学生は講義ノートをきちんと取ることを強要される．板書された式や説明をきれいにノートに書きとっているかどうかが成績に反映される．当時，留学したばかりの寺尾寿とすでに数年滞在中の古市公威は，机を並べて天体力学の講義を受けたらしい．寺尾は東大星学科最初の日本人教授，初代東京天文台長，初代日本天文学会理事長であり，日本近代天文学の建設者である．古市は初代工科大学長であり，日本土木学会の創始者である．寺尾の遺品は戦災を被ったようだ．古市がティスランの講義を聞いたときの講義ノートが東大工学部に保存されている．科学史家・佐藤利男氏の情報である．このような風習のおかげで，ティスランやポアンカレの講義が本として出版されたのであろう．

■ 6. ポアンカレ以後の天体力学 ■

ポアンカレやブルンスは万有引力の法則定式化以来行われてきた多体問題の積分可能性問題を否定的に解決した．ケプラーに始まる二体問題は完全に解ける．制限三体問題は二体問題のようには解けない．その結果として，三体問題，n 体問題は解けない．では，天体力学はどちらに向かって進むべきか？ ポアンカレは進むべき道をも示した．それが定性的に運動方程式の解を調べることである[13)]．

ポアンカレ以後は，もちろん国が違えば傾向も違い，いくつもの流れが生じた．その代表的なものの一つが，三体問題の解の束を調べる研究であり，1920年代のフランスから旧ソ連に移り，1990年代に日本に飛び火した[13)]．三体系の無限時間過去の状態と無限時間未来の状態をつなぐ．どの種類のつながり方の軌道測度が正で，どれが測度ゼロか，という問題である．

ポアンカレとブルンスの証明法はそれぞれ特徴的であり，後の時代に影響を与えた．ブルンスの証明は本質的に三体衝突が悪さすることを使う．一方，ポアンカレの証明は，共鳴の存在を使う．共鳴が稠密であることから，解析性が成り立たない．ブルンスのあとで，三体衝突がなぜ悪さをするかを調べたのがジーゲルである．彼は三体衝突が解析的な意味で真性特異点であることを示した．

その後，マギーは1974年に三体衝突点を膨らませ，そこにまるで2着のステテコを胴体で縫い合わせたような多様体を貼った．マギーの衝突多様体と呼ばれるものである．膨らませたおかげで，三体衝突の到着点と三体衝突の出発点が分離した．この多様体上で，到着点から出発する不安定多様体が出発点の安定多様体と滑らかにつながらなければ，可積分でないことが示された．このようにして，三体衝突と非可積分性の関係は，次第に明らかになってきた．

太陽の周りを地球が円運動で公転する．地球の周りを質量ゼロの月が運動する．月の運動を求めよ．これが円制限三体問題である．地球の質量をゼロにすれば，太陽の周りの地球と月の別々の楕円運動となり，月の運動はもちろん解ける．地球の質量をゼロでないとすると，月の運動は非可積分となる．このとき月はどんな運動をするのだろう．これに答えたのがKAM（コルモゴロフ–アーノルド–モーザー）理論である．

KAM理論のアーノルド版によれば，円制限三体問題の解の空間は4次元で，エネルギーを固定すれば3次元である．可積分のとき，この3次元空間を2次元のトーラスが入れ子になって埋めている．衛星軌道は，ある入れ子トーラスの中心閉曲線である．地球の質量をゼロから増やすと，この入れ子構造に破れが生じる．中心から離れると，4節に出てきた「共鳴」の場所でトーラスが壊れる．これがポアンカレの示したことである．地球質量がゼロに近い限り，共鳴でない場所にトーラスが残っていることをアーノルドは示した．

アーノルドは自由度 n のハミルトン系を考えた．座標が n 個で運動量が n 個である．トーラスは n 次元である．$n>3$ のときトーラスは $2n$ 次元の相空間を分けない．このことに気づいて，高次元ではKAM理論にも関わらず，拡散が生じ，ハミルトン系の解の安定性が保証されないことをアーノルドは示した．アーノルド拡散である．

7. 天体力学の将来

第二次大戦後，1957年に旧ソ連がスプートニクを打ち上げた．世界に衝撃が走った．宇宙時代の幕開けであった．対抗して米国も人工衛星を打ち上げ，世界中から天体力学者を呼んだ．日本から，古在由秀，堀源一郎，青木信仰，少し遅れて木下宙らが渡米して人工衛星の運動理論の構築に大いに貢献し，また理論的貢献も行った．古在機構と堀摂動論が特筆すべき日本の貢献である．

前に述べた万有引力からつながる流れとして，わが太陽系の長期安定性や太陽系外惑星系の安定性，現実に存在する少数多体系が研究対象となっている．天文学の前線は広がり，天体物理学的な取扱いを必要とする現象が宇宙の果てに見つかる．だが，宇宙的な規模で一番重要な力は重力なので，天体力学が貢献できるはずである．天体物理学者との交流により，個々の現象を対症療法的に解くことも天体力学の役割であろう．

三体問題を含む n 体問題の理論的な方向では，2000年に8の字解が発見された．それに付随して多数の天体が同じ軌跡上を次々に運動する舞踏周期解が多数見つかった．記号力学で見ると，1次元三体問題には，いくらでも細かい構造が見えてくる．その複雑さはカオスを示す一般の力学系にも見られるものであり，結果のまとめ方に関する悩みも共通する．

力学の2つの流れの一つ，力学の基盤整備の課題は極めて数学的であって，筆者の能力をはるかに越える．天体力学に強く関連した分野では，前節で述べたアーノルド拡散を数値計算で確認する課題がある．また，KAM理論で存在の示された非共鳴の場所でのトーラスは非可積分性が強くなると崩壊する．2次元写像でしか示されていないが，崩壊後も準周期軌道として残る．このことをハミルトン系でも示すことが課題として残っている．このような問題を解くために，多倍長，例えば1万桁の計算ができたらいいなと思っている．

最後に標語的にポアンカレの仕事を評価するなら，ポアンカレは天体力学の将来に暗雲を見た人であり，またその暗雲の中に晴れ間を見た人でもある．

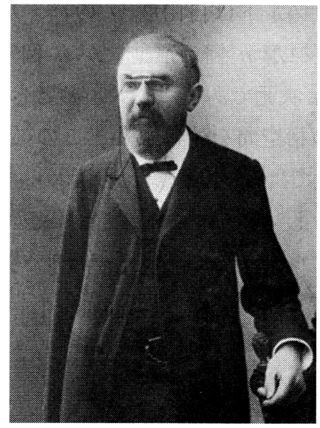
参考文献

1) 橋本啓造（訳），『晋書天文志』，科学の名著2，中国天文学・数学集，朝日出版社，1980.
2) F.R. Stephenson: 1997, Historical Eclipses and Earth's rotation, Cambrdge Univ. Press.
3) O. Neugebauer, 1983, Astronomy and History: selected essays, Springer–Verlag.
4) 山本義隆，『磁力と重力の発見』，みすず書房，2003.
5) I. Newton,『プリンシピア—自然哲学の数学的原理—』，中野猿人訳，講談社，1977.
6) S. Laplace,『確率の哲学的試論』，1814, "Essai Philosophique sue les Probabiliteés"（岩波文庫から内井惣七による邦訳あり）.
7) 山本義隆，『古典力学の形成』，日本評論社，1997;『重力と力学的世界』，1981; C. Lanczos, 1949, The Variational Principles of Mechnics, Dover.
8) C. Siegel and J. Moser, 1971, Lectures on Celestial Mechanics（本文の冒頭にライプニッツのことばとして引用）.
9) Les Méthodes nouvelles de la Mécanique céleste I, 1892; 1893, II; 1896, III. これの英訳のD.L. Goroffによる序が詳しい．『常微分方程式』（福原満州雄，浦太郎訳．IIIの翻訳），共立出版，1970; F. ディアク，P. ホームズ『天体力学のパイオニアたち　上下』（吉田春夫訳）シュプリンガー・ジャパン，2004.
10) H. Poincaré: 1890, Sur le probléme des trois corps et les Équation de la dynamique, *Acta Math.* **13**, 5–271.
11) 文献9)．I巻5章.
12) H. Poincaré: Lecons de mécanique céleste' I, 1905; II, 1907, 1909; III 1910.
13) T. Ito & K. Tanikawa: 2007, Trends in 20th century celestial mechanics, Publ. Astron. Obs. Japan, Vol.9, 55–112.

（たにかわ・きよたか，国立天文台理論天文学研究系）

時計仕掛けの地図

ポアンカレと相対性理論



山 田　澄 生

1. はじめに

まず最初にここでいう相対性理論とは，いわゆる特殊相対性理論であることを断っておく．一般相対性理論はポアンカレが 1912 年に没してから数年後に確立された理論であり，ポアンカレの次世代の科学者たちの産物である．

相対性理論といえばアインシュタイン（Relativity = Einstein 略して R = E）というのが，普通の連想である．科学という研究分野ではさらなる発展が至上の目的とされているので，過去を振り返るという行為に実際に現場で研究をしている科学者が多大な興味を引かれるかと問われれば，答えは概して否定的もしくは無関心であろう．一方で，世の中では大抵科学のことは科学者に任せてしまっているので，よって相対性理論といえばアインシュタインという標語（R = E）に批判的であることの必要も，興味も湧かないというのは当然であろう．

数年前にアメリカの一般週刊誌『ニューヨーカー』にポアンカレ予想に関するゴシップ色の強い記事が掲載され（名誉毀損の裁判沙汰も含めて）話題となったことに見られるように，近年のポアンカレという数学者への一般の関心は，言うまでもなくポアンカレ予想という位相幾何学の 100 年来の未解決問題が，近年ハミルトン，ペレルマンたちによって解決されたことによって再燃したものであり，特殊相対性理論には（直接は）関係はない．よって相対性理論になぜポアンカレが関係してくるのか，いぶかしく思われる方もおられるかもしれない．しかし，実はポアンカレはアインシュタインの同時代の科学者として深く関係しており，科学者ポアンカレの総合的な業績を明らかにしようという今回の試みに便乗して，特殊相対性理論（R）からアインシュタイン（E）を引いたとき（R − E），その答えがゼロでないということを，本稿で少しでも紹介できれば幸いである．

2. 今（パリは）何時（なんどき）だい？

1880 年代にパリ市内の公式時間は，市の中心にある大きなボイラーから，町中に張り巡らされた配管に高圧の蒸気を定期的に送り込むことによって管理されていた[2]．蒸気がやってきたらお昼，というシステムである．これは時間の基準を取り決めるに当たって，1889 年にメートル原基を長さの国際基準として導入した科学立国として誇り高きフランスのシステムとしては，あまりにもお粗末なものであろう．見方を変えれば，時間というものはつい 100 年前には，ものを測る指標としては少なからず覚束ない観念であったと言えよう．さて，お昼の話に戻ると，パリの都心の人はボイラーから出た蒸気がすぐ届くので，郊外の人よりも早く昼ご飯を食べることになる．そこで少し頭を働かせて，郊外の時計に蒸気がついたときは，実は正午ではなく正午に少し時間を足したもの，つま

り市中心から郊外への距離を蒸気の速度で割った分を足した時間となるように時計をあらかじめ調整しておけばよい．実はこれが特殊相対性理論のアイデアの元となってくる．

19世紀ヨーロッパ列強国は，植民地政策に多くを費やした．植民地のある南米，アフリカ，そして旧植民地の北米は，ヨーロッパ本土から遠く離れているため，その位置を確認することは容易ではなかった．特に経度の測量に関する誤差を小さくする努力が長いこと実を結ばなかった理由は，地球上の遠く離れた2地点での共通の時間（同時性）を技術的に確立することができなかったためである．A地点（パリ）で天球上でのある現象の起こる時間（例えば月が天球で最も高く位置する時間）が午前1時，B地点では（**パリ時間で**）午前9時であるなら，A地点とB地点の経度差は $360 \times \frac{9-1}{24} = 120$ 度である．理論的にはこんな簡単なことが，パリ時間をB地点で確証できないという技術的な問題が障害となって，十分な精度が得られなかった．この問題はイギリスが主導になって1890年代までに曳かれた海底および地上ケーブル，そしてのちにエッフェル塔から発せられる無線電波システムの完成で電磁波の送信を介することによって解決される．しかし，国際電話で話したり，またはテレビの海外駐在員とスタジオのニュースキャスターとのやり取りを見ればわかるように，光の速度で情報を伝達しても，地球程度の大きさがあると，我々の感覚で十分認識できる程度の遅れが生じる．この状況は以下の観察から説明される．いまA地点が正午にB地点に信号を送り，A地点より西に位置するB地点では（B地点の時計で）午前11時05分に信号を受けるとする．今度はB地点で正午にA地点に信号を送り，それがA地点に（A地点の時計で）午後1時05分に届くとする．A地点（パリ）からB地点（例えば東京）にケーブル（または無線）を介して信号を送り，信号を受けたB地点はその信号をA地点にそのまま返す．この状況では，AB間の経度差は $(55 + 65) \div 2 = 60$ 分で表され，AB間の交信にかかった時間は $(65 - 55) \div 2 = 5$ で表される．（ここで5分という時間はもちろん誇張されたスケールである．）この原理を使って世界中に散らばった基準点の経度を確立するために，未開の地に天文学者および技術者によってなるプロジェクトチームを送り込んだのが，フランス共和国経度局の幹部の一人であったポアンカレである．イギリス，スペイン，アメリカ，そしてフランスによって共有されていたケーブル網は，当然の如く各国の軍事機密と深く関わっており，ポアンカレはフランス政府の高級官僚として1895年から1995年にわたって科学と政治の間を取り持つに大きな影響力を持っていたことを示す資料が数多く残っている[2)]．ポアンカレは，この経度観測という科学的経験則，（慣習，conventionという言葉をポアンカレは使っている）から誘導される，**「空間の2地点における同時性は，その2地点間での電磁波の交信のみによってしか定義され得ない」**という観念が，少なからず我々の直観を裏切るものであっても，最も自然な時間の考え方であるという主張を1898年の哲学の論文「時間という測度」で述べている．ちなみに空間上2つの異なった地点での同時性が無条件に存在し得るというニュートン力学に内在している観念を受け入れることの危うさは，後にアインシュタインに大きな影響を与えたマッハの本『力学の科学』（1883年）においても指摘されており，問題意識としてはポアンカレ以前からあったものである．

3. ローレンツ理論とポアンカレ

特殊相対性理論の歴史的必然性には，2つの起因があげられる．一つは上に述べたニュートン力学からくる同時性の観念への疑問であり，もう一つはマックスウェル方程式の座標変換に関する共変性である．本誌2003年10月号の木下篤哉氏による記事[3)]を初めとして特殊相対性理論とマックスウェルの方程式の関係に関する歴史的な状況を説明してある文献は多々あるので，ここではポアンカレに関係するところだけを述べる．真空中の電場 $\boldsymbol{E}$ と磁場 $\boldsymbol{B}$ の振舞いを表す偏微分方程式系

であるマックスウェルの方程式から，次の関係が誘導される．

$$\nabla^2 \boldsymbol{E} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{E}}{\partial t^2}, \quad \nabla^2 \boldsymbol{B} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{B}}{\partial t^2}.$$

ここで ∇f は3次元ユークリッド空間に定義された関数 f の勾配(gradient)ベクトル，$\nabla^2 f := \nabla\cdot\nabla f$ は勾配ベクトル場 ∇f の発散（divergence），そして c は真空中の光の速度である．マックスウェルを初めとする19世紀末の科学者のこの方程式の解釈は，「静止した」座標系 (x, y, z, t) に対し電場および磁場が時間 t と空間 x, y, z の関数としての挙動を描写するものであった．ここで「静止した」というのは，空間を満たしている仮想の媒質「エーテル」に関して相対速度がゼロということである．いま観測者が異なった慣性系に属するとき，つまり観測者がエーテルに対して等速直線運動（簡単のため x 軸に沿って速度 $-v$ で運動しているとする）をしているときを考える．つまり「ある空間が静止していても等速直線運動していても，その中に置かれた物体の間での相互運動には全く変化がない」というニュートン力学の相対性原理から導かれるガリレイ変換

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t$$

という変数変換で，静止している「絶対空間」の座標系 (x, y, z, t) から動いている座標系 (x', y', z', t') が表される．しかし動いている観測者にとって，新しい座標系で上の電磁場に関する2式は成立しない．これは微分作用素の変数変換

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial t'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t'} + \frac{\partial x'}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x'} = \frac{\partial}{\partial t'} - v\frac{\partial}{\partial x'}$$

から，$-v\frac{\partial}{\partial x'}$ という余計な項が現れてしまい，$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t'}$ とならないからである．この不都合に関してローレンツは，1895年に次の修正をする．

$$x' = x - vt, \quad y' = y, \quad z' = z, \quad t' = t - \frac{vx}{c^2}.$$

この変換で，マックスウェル方程式は $v/c \ll 1$ のとき，動いている座標系において近似的に成立する．この t' はローレンツが局所時間と命名したもので，等速度 v で x 軸に沿って運動している観測者にとって「局所的」に定義されている数学的構築（つまり物理的意味を持たない量）である．この式に対して，ポアンカレは1901年1月にローレンツに手紙で次の解釈を伝えた[2)]．

いま点Aと点Bが距離 x を保ったまま，エーテルに対してそれぞれ等速度 v で移動しているとする．そしてAからBに光の信号を送るとき，その信号はエーテルに対して $c - v$ の速度で伝播する．Aにとってエーテルは「向かい風」として働くのである．よって信号がBに届くまでにかかる時間は $x/(c - v)$ である．Bが送られた信号を間髪入れずAに送り返すと，今度はエーテルは「追い風」として働き，折り返された信号は $c + v$ の速度で電波する．ポアンカレは上に述べた「空間の2地点における同時性は，その2地点間での電磁波の（往復の）交信のみによってしか定義されえない」という考えをここに応用して，往復にかかる時間は，$v \ll c$ の条件の下

$$\frac{x}{c-v} + \frac{x}{c+v} = \frac{2xc}{c^2 - v^2} \approx \frac{2x}{c}$$

である．この時間を半分にした

$$t_{\mathrm{AB}} := \frac{1}{2}\frac{2xc}{c^2 - v^2} \approx \frac{x}{c}$$

が，この動いている慣性系において，信号がAからBに伝わるのに要した時間と考える．しかし，Bは $t'_{\mathrm{AB}} := \frac{x}{c-v}$ 後にAから信号を受け取っており，この2つの時間には

$$\begin{aligned} t'_{\mathrm{AB}} - t_{\mathrm{AB}} &= \frac{x}{c-v} - \frac{xc}{c^2 - v^2} \\ &= \frac{xv}{c^2 - v^2} \approx \frac{xv}{c^2} \end{aligned}$$

だけの誤差がある．この誤差はまさしくローレンツの導入したガリレオ変換からの修正項[2)]である．

ここでポアンカレが注目したのは，経度の測量技師たちの信号が往復するときにかかる時間を二分するという経験則が「静止」していない慣性系においても，（v/c の1次近似の意味で）光が速度 c で伝播しているように解釈できることを示唆していることであった．つまりある一つの慣性系に属するAとBが，光の信号を往復させることに

よって同時性を確認するというプロセスを踏む限り，AとBは自分たちが属している慣性系が「静止」しているのか，等速度運動しているのか知り得ないという「**相対性**」を抽出したことは，ポアンカレの先見性と見なすことができよう．

1895年の局所時間の導入後さらに，ローレンツは1次近似の意味でなく，エーテルの存在，つまり「静止」している座標系の必然性を仮定したときにマイケルソン–モーリーの実験（前述した木村氏の記事[3]を参照）から強制されるローレンツ–フィッツジェラルド収縮仮説を受け入れ，収縮係数 $\gamma = 1/\sqrt{1-v^2/c^2}$ を変換式に導入する：

$$x' = \varepsilon\gamma(x - vt), \quad y' = \varepsilon\gamma y, \quad z' = \varepsilon\gamma z,$$

$$t' = \varepsilon\gamma\left(t - \frac{vx}{c^2}\right).$$

ここで ε はスケーリング定数である．ポアンカレは，エーテルに対して等速度 v_1 で運動している慣性系 I_1 の中で，等速度 v_2 で運動している慣性系 I_2 は，それ自体静止しているエーテルに関して慣性系であり，よってエーテルと I_2 の間に，上の変数変換が v_1 と v_2 から決定される相対速度 v_{12} に対して成り立つはずである．特に $v_2 = -v_1$ のときは I_2 は「静止」している慣性系であることから，$v_{12} = 0$ でなくてはならない．これはつまり慣性系全体が，エーテルが単位元として表される群の構造を持つことを言う．ポアンカレは，この群の構造が ε が1のときのみ可能であり，v_1 と v_2 の積 v_{12} は

$$v_{12} = \frac{v_1 + v_2}{1 + v_1 v_2/c^2}$$

で完全に決定され，かつ

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2$$

という数はローレンツ変換の下で不変であることを1905年6月に発表する．現在に言うローレンツ変換，そしてローレンツ変換を元とするローレンツ群の完成である．

この変換によって，マックスウェル方程式が異なる慣性系の間で矛盾なく成立しているという共変性が示されたことになる．ポアンカレにとっては，この変換が信号の交信によって定義された同時性のアイデアを精密化（1次近似を厳密な等式に改善）によって得られたことは，この変換に内在する「相対性」理論の存在を確信するに当たって大切であったと考えられる．

しかしローレンツとポアンカレが完成したのはローレンツ変換であって，特殊相対性理論ではない．ローレンツ変換にみられる収縮係数 γ は収縮仮説を前提としているものであり，収縮仮説はエーテルの存在を仮定したことから必要となる数学的構築である．ポアンカレは，ローレンツ変換に付随する物理的な問題を十分認識しており，1904年の米セントルイスにおける講演では放射能に関する（エネルギー保存則，質量保存則）ローレンツ変換のもたらす矛盾，そして，作用反作用の原理との非整合性（ローレンツも人工的であると認めざるを得なかった「エーテルの質量は無限でなければならない」という仮説の必要）を指摘している[2]．一方で同じ講演の結びでは，次のように述べている[4]．「多分我々には新しい力学を作り出すことが要請されているのでしょう．それが何であるかは未だはっきりとは見えてきませんが，その新しい力学の中では，光の速度はそれを超えることはできない極限として理解されるべきものでしょう.」この発言は，上に述べた「同時性の定義が慣性系に独立である」という時間の「相対性」に関する観察と総合すると，ポアンカレが謙虚さを失うことなくも，この時点でかなり特殊相対性理論を全貌するに迫っていたことを窺わせている．

4. アインシュタインの2原理

ここでアインシュタインの理論を手短に紹介しよう．それは1905年6月に完成した論文の序論に記されている次の2つの原理によって成立している．

1. すべての慣性系において，そこで起こるべき現象は同等である [**相対性原理**].

2. 光は真空中を，光源の運動に無関係に一定速度 c で伝播する [光速度不変の原理].

原理 1 と空間の等質性から，異なる慣性系の座標間の関係式 $x' = x'(x, y, z, t)$, $y' = y'(x, y, z, t)$, $z' = z'(x, y, z, t)$ は線形でなくてはならない．原理 2 は，2 つの慣性系 A, B の原点が $t = t' = 0$ で重なるとすれば，その瞬間，共通の原点で発せられた光の信号は慣性系 A では (x, y, z, t)-空間上で t 秒後，$x^2 + y^2 + z^2 = c^2t^2$ で定義される球面上に広がっており，慣性系 B では t' 秒後，球面 $x'^2 + y'^2 + z'^2 = c^2t'^2$ 上に広がっている．以上の連立方程式を解くことによってローレンツ変換が導き出される[3]．ただしここでもスケール定数 ε を決定することが必要であるが，群の構造の必要性から定数は 1 であることが決定される．「静止」している慣性系を満たしている媒介エーテルには全く言及していないし，よってエーテルの追い風/向い風に起因した $(c \pm v)$ のような表現も現れないことが重要である．エーテルの存在から必然的に導かれたローレンツ–フィッツジェラルド収縮仮説もこの 2 つの原理の下では必要とされない．

5. ポアンカレとアインシュタイン

現在最も標準的であるとされるアインシュタインの伝記の中でアブラハム・パイスは，ポアンカレはローレンツ–フィッツジェラルド収縮仮説が必要でないということを 1909 年の時点においても認識していなかった可能性が高いことを述べている[4]．つまりポアンカレは，ローレンツ変換の正しさを説明するに当たってエーテルの存在が必要ないこと，またはアインシュタインの 2 つの原理がエーテルにまつわる不都合を説明するに十分であることを，自ら進んでは公言していない．一方で，アインシュタインは，ポアンカレの哲学的考察に若いときから敬意を払っていたものの，1895 年以降のローレンツ変換に関する科学的文献には，1905 年の革命的な論文を書くに当たって一切触れていない．この 2 人の科学者の「同時性」に矛盾するこれらの状況証拠は，現在に至るまで多くの論議を引き起こしてきた．物理学者のフリーマン・ダイソンは，昨年書かれたピーター・ギャリソンの本[2]の書評[1]において，科学の歴史を論ずるに 2 つの学派が存在に言及している．一つ目は，科学の発展は，進化論における環境による自然淘汰の如く，科学者は与えられた教義の中で時々刻々と既存の理論を磨いていく作業に取り組むことによって達成される．この進化の過程は多くの場合実験器具の洗練に起因する．これに対する学派，『科学革命の構造』を著したトーマス・クーンによってリードされてきた一派は，科学の発展は既存の教義を根底からひっくり返すような多大な影響力を持つアイデアの出現によって，巻き起こされる「パラダイム・シフト」によってもたらされると主張する．道具とアイデアのどちらが科学の発展に本質的であるか，という論争である．もちろん一般的には，このどちらでもなく両説の中庸が正論なのであるが，ダイソンは特殊相対性理論の発展に関してはアインシュタインの貢献は，「パラダイム・シフト」であったと断言[1]する．1905 年に書かれたポアンカレの論文とアインシュタインの論文に現れる数式は，ほとんど同一である．時にアインシュタインがローレンツとポアンカレから特殊相対性理論を横取りしたとされる所以である．もちろん上記のようにポアンカレは，光による相互通信から定義される同時性の必然性をいち早く認識した当本人であり，また彼はローレンツ変換による不変量 $x^2 + y^2 + z^2 - c^2t^2$ をアインシュタインとほぼ同時に発見してもいる．この量が慣性系によらないということから，光速度の不変性（アインシュタインの原理 2.）まではもう一歩，というところであるが，ポアンカレは偉大なるローレンツ博士が提唱してきたエーテルに基づいた考え方，それに付随してくる収縮仮説の必然性を最後まで見捨てることができなかった．一方アインシュタインは学生の段階ですでに，エーテルの存在の不完全さを確信し，「エーテル教義」をもって自らを洗脳しようとする既得権を持つ教授陣（この中にはポアンカレも含まれる）に強く反発し，ローレンツの

業績に多くの敬意を払っていた反面，その「エーテル教義」からは全く自由な考え方をすることが，上記の2原理へ達成することができた理由であるとダイソン[1]は考えている．なぜポアンカレは一世一代のチャンスをみすみす見逃したのであろうか？ 数学史の観点からは，ポアンカレは微分方程式を専門とする数学者[7]であった．本号で特集されているポアンカレの業績はそのほとんどが，貢献した分野が力学系であろうとトポロジーであろうと，彼の微分方程式への造詣の深い考察から導き出されたものである[7]．微分方程式は言うまでもなくある関数の微分によって表される項の間に成り立っている方程式であり，その定式化に座標の存在は必須である．もちろんその反面ポアンカレはローレンツ群による慣性系全体に定義された対称性に最も早く注目した科学者であったが，それでもエーテルがローレンツ群の単位元と対応するという都合の良い慣習（convention）に感覚的に執着してしまったのかもしれない．さらに推察を続ければ，ポアンカレは，最も大きな業績の一つである Uniformization（一意化定理）で，2次元曲面の普遍被覆の特定をするが，彼の頭の中では，この我々の属する世界の大域的座標系である「普遍被覆」とエーテルで満たされた「静止」している空間が重なってしまったのだろうか．アインシュタインは，この後一般相対性理論を構築する．その際，重要な概念となる多様体（Manifold）の概念が1850年代のリーマンの功績が世に出てから数学的に必須な考え方であることは，19世紀後半の第一線の数学者の間にはすでに広く認識されていた．しかし実際にこの概念が明文化されたのは，1913年に出版されたヘルマン・ワイルの『リーマン面』[5]が初めてであることは，この概念の定式化がいかに困難であったかを示唆しているように思われる．各座標系を慣性系（これはいわゆるミンコフスキー空間の座標系である）と同一視して考えると，いかなる慣性系も他のいかなる慣性系と同値であるという相対性原理と解釈される．ワイルによる多様体（ここではリーマン面）の定義[5]で最も本質的なことは，「ある座標系は他のいかなる座標系と同値であることがその多様体上の関数を定義するに当たって不可欠である」という観点である．

6. 時計仕掛けの地図

ここでローレンツ，ポアンカレおよびアインシュタインによって完成された相対性理論の枠組みで，ある一つの慣性系がどのようなものであるかを整理してみる．ある等速度で運動している観測者にとっての慣性系とは，その観測者の観測できる事象の起こり得る世界である．いまこの世界の「地図」を作りたい．私たちが日常の生活で地図といった場合，それは物の場所を記録する媒介である．普通地図は紙の上に画かれていて，つまり2次元の記録であるが，3次元の地図というのも想像に難くない．電子レンジは冷蔵庫の上，流しは冷蔵庫の横のように，物の位置は3つの数字 (x, y, z) で特定される．しかしここで考える慣性系の地図は4つの数字 (x, y, z, t) で表される．観測者はこの4

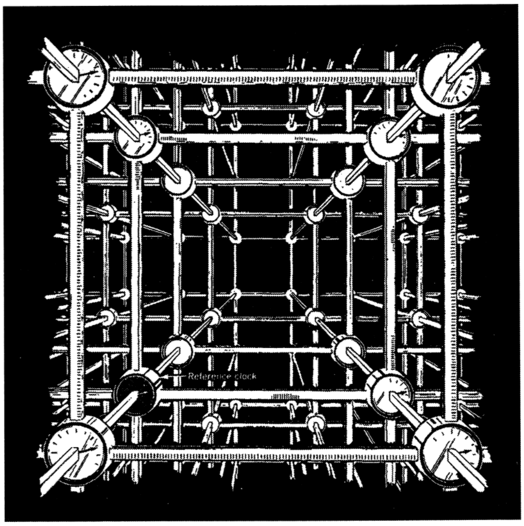


図1　時計仕掛けの地図．文献6) より転載．Fig.5, p.1–17 from EXPLORING BLACK HOLES: Introduction to General Relativity by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. Copyright © 2000 by Edwin F. Taylor and John Archibald Wheeler. Reprinted by permission of Pearson Education, Inc.

つの数字を使って，何がどこでいつ起こったかを記録し自分の属する慣性系の「地図」を作成する．観測者は自分の周りに広がっている3次元の空間に立方体の格子によってなるジャングルジム[6]を無限に張り巡らせる（図1）．いまその立方体の一辺を1メートルとする．そしてジャングルジムの各頂点に時計を設置し，それらの「時間」を合わせる．いますべての時計が止まっている状態で，格子のある頂点（これを原点とする）で信号を発信する．その瞬間，原点にある時計は正午を指しているとしよう．そしてその信号がある原点以外の頂点 (x, y, z) の時計に届いた瞬間，その時計が動き出すようにする．ただし，この時計は，あらかじめ正午から $\Delta t = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}/c$ だけ進めておく．ポアンカレによってエクアドルのジャングルに送り込まれた経度局の技師たちは，1890年代にすでに Δt を原点と頂点 (x, y, z) の間を信号が往復する時間の半分として計算していたことをここで思い出そう．

この時計付ジャングルジムを使って，この慣性系の事象を記録する．ある事象 O の空間の座標は，その事象に最も近い頂点の座標 (x, y, z) と同一視する．そしてその事象の時間 t は，その頂点にある時計の時間と記録する．（必要とあらば，格子のスケールを小さくすることで，記録の正確さは改善される．）こうしてあらゆる事象を4つの数字 (x, y, z, t) で表し，この慣性系の「地図」を作る．言ってみれば，このジャングルジム全体がこれまで幾度となく使ってきた「観測者」という言葉の正確な意味なのである．

7. エピローグ

ポアンカレは58歳でその生涯を終える前年の1911年，当時32歳のアインシュタインをスイス連邦工科大学の教授職に推薦する手紙[2]を書いている．

「我々が彼（アインシュタイン）について最も高く評価しなくてはいけない点は，新しい考え方に素早く適応し，そこから新しい結果を引き出す彼の能力である．彼は物理現象を前に古典的原理への執着を全くなくして，あらゆる可能性を頭の中に素早く思い描くことができる．これらの可能性は彼の中で次々と新しい予想に変換され，それらが実験で試されることを待ち望むのです．彼がこうして生み出されたあらゆる道を辿ろうとするに当たって，そのほとんどが行き止まりであることに疑いはありません．しかしそれらの中にたった一つでも正しい道があることを我々が望むことを止(や)めてはならないのです．そしてそれで十分なのです．…アインシュタイン氏が，いかに希少な才能であるかは，これから来る年月によってますます明らかになっていくことでしょう．」

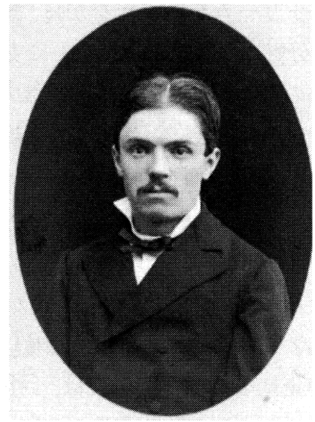
ポアンカレは，科学の発展の歴史が慣習（Convention）と御都合主義（Opportunism）によって支えられてきたことを生涯に何度も言及している．そして科学に不可欠な「先見性」と一見矛盾する「慣習」と「御都合」が，いかに大切なものであり，健全なものであることを力説するのである．自分よりも一世代下の若い科学者が，ローレンツや自分が参加して作り上げてきたエーテルの力学という「慣習」を踏み台にして，相対性理論という素晴らしい御都合（Opportunity）を手にしたことに，ポアンカレが激励と賞賛を惜しむまいとする寛大さに満ちた手紙である．この手紙の存在をアインシュタインは，最後まで知ることはなかったという[1]．

参考文献

1) Freeman Dyson. Clockwork Science. New York Review of Books Vol.**50** No.17 (2003).
2) Peter Galison. *Einstein's Clocks Poincare's Maps.* Norton (2004).
3) 木下篤哉.「特殊相対論の成立と歴史」. 数理科学 **10** (2003)（別冊・数理科学「相対論の歩み」に再録）.
4) Abraham Pais. *Subtle is the Lord.* Oxford Univ. Press (1982).
5) H. ワイル.『リーマン面』. 岩波書店 (1974).
6) Edwin Taylor and John Wheeler. *Exploring Black Holes.* Addison Wesley Longman (2000).
7) Benjamin Yandell. *The Honor Class.* A K Peters (2002)

（やまだ・すみお，東北大学大学院理学研究科）

ポアンカレと数学的創造



山下　純一

... la mathématique est l'art de donner
le même nom à des choses différentes.
数学は異なるものに同じ名前を与えるアートである
——ポアンカレ（文献 1) p.29)

1. 数学者ポアンカレ

ポアンカレ（Henri Poincaré, 1854–1912）は自分自身の業績を，微分方程式，複素関数論，純粋数学（数論，代数，位相幾何），天体力学，数理物理，科学哲学，その他（啓蒙的・教育的など）という7つのテーマに分類している．数学者としてのデビュー（24歳）も学位を取った（25歳）のもテーマは常微分方程式だった．その直後に常微分方程式の解の一意化問題に関連して，フックス関数（保型関数）の発見という最初の大事件が発生している．フックス関数論の構築をめざす過程で，ポアンカレ平面（円板上の非ユークリッド幾何のモデル）を創造し，（楕円関数論のテータ級数とのアナロジーから）テータフックス級数を定義しその比としてフックス関数を捉え，代数関数とそれを定めるリーマン面の種数とフックス群（フックス関数を定義する群）のリーマン球面上の作用に関する基本領域との本質的な関係を明らかにした．しかも，これらの理論全体は，線形常微分方程式の解の一意化問題を攻略するための準備段階に過ぎなかった．ポアンカレの常微分方程式方面の研究は，これだけではなく，解曲線の定性的（位相幾何的）考察も行なっている．ポアンカレは，こうした定性的考察，2重積分の留数についての位相幾何的考察，天体力学における軌道の位相幾何的考察，フックス関数の考察の過程で得た被覆面のガロア理論への展望（ポアンカレの基本群の定義はもともと被覆変換群のイメージに基づいていた），さらには，リーマンの代数関数論（複素代数曲線論）の2次元化としての複素代数曲面論の位相幾何的考察への胎動などを経て，代数的位相幾何学（位置解析，Analysis situs），つまり代数トポロジーの一般論の構築とその応用という目標に向って前進する．ポアンカレの代数トポロジーに関する論文は1895年（41歳）から1904年（50歳）にかけて書いた6つしかない．最初の論文「位置解析」では，ポアンカレがそれまでにさまざまな分野で自在に活用してきた「連続性による方法」(méthode de continuité)，つまり「位相幾何な方法」を総括する意味でその基礎付けを狙っている．具体的にいえば，（微分）多様体，ホモロジー，ベッチ数，交点数などを定義し，ポアンカレの双対定理を証明し，基本群を（現代の教科書とは異なるが）変換群の言葉で定義し，オイラー標数を高次元化している．思い返せば，論文「位置解析」は代数トポロジーの世界の大半を一気に創造したような力作だった．当時としては十分に「アブストラクト・ナンセンス」とも誤解されかねない抽象的な体系構築へのポアンカレの情熱は，ニュートン，オイラー，ラプラス，ガウス，リーマンなどの数学のメ

インストリームを踏まえながら，類似性への「気づき」や分野の融合への「意欲」に支えられて，爆発したものだった．このように，ポアンカレは「保守性・歴史性」に裏打ちされた「革新性」の萌芽の形成者としての側面を強くもっていた．そのおかげで，若いポアンカレは保型関数を巡る研究競争ではクラインに勝利することができた．しかし，晩年になると，「革新性」に身をまかせ切れない「威光」を身に帯びてしまっていたせいで，特殊相対性理論の発見をめざす闘いでは，「捨て身」の若いアインシュタインに勝ちを譲る形になってしまった．

2. あいまいさ

ポアンカレの大論文（重要論文）にはあいまいな点が多いといわれている．あいまいといっても，単純に間違っているということではない．ポアンカレの凄いところは，自分が正しいと確信したあいまいさの中に，まったく新しい数学的風景を描き出すことができる点だ．論文のあいまいさのせいでピンチに陥ったこともあったし，論文の発表後にあいまいさを批判されることもあったが，ポアンカレは，問題点を自ら執拗に追究してあいまいと見えた部分を「発展的に解消」してしまえるだけの精神的な「粘り強さ」（強迫性障害を連想させる「執着」とアスペルガー障害を連想させる「愛着」に注目）を持っていた．

たとえば，ポアンカレは，スウェーデンとノルウェーの国王オスカル2世の60歳（1889年1月）を記念する懸賞問題のひとつに挑戦し，締め切り期限直前の1888年5月に制限3体問題に関するあいまいさの残る論文を提出してしまったことがある．この論文のレフェリーだったワイエルシュトラスが（体調不良だったとあとから弁明しているが）絶賛したこともあり，授賞が決定．ところが，雑誌アクタ・マテマティカに掲載しようとして印刷作業に取りかかったときに，ある数学者があいまいな部分に気づき，ポアンカレはこれを修正する段階でもっと致命的な問題点に自ら気がついてしまった．印刷作業は中止され，ポアンカレは1年ばかりかけて，受賞論文の改訂版を書きあげた．この改訂版の序文において，ポアンカレは，「私をあるデリケートな部分に注意を向けさせ，重大な誤りを見つけて修正することができるようにしてくれたのも，また，彼である」（C'est même lui qui, en appelant mon attention sur un point délicat, m'a permis de découvrir et de rectifier une importante erreur.）と書き，最初のあいまいさを指摘してくれた数学者に感謝している（と見せて自分自身の貢献を強調している）．ポアンカレの到達した結論はワイエルシュトラスなどには予想もできないものだった．ポアンカレは，位相幾何的な思考によって，決定論的なシステムの中に予測不能の部分があることを発見したのだ．「カオス理論」への先駆けとなったわけだが，それは，コンピュータの発達によって，シミュレーションとグラフィック機能が進歩してはじめて注目されるようになった．「80年後の数学」を先取りしたポアンカレの想像力のパワーは驚異的だ．

あいまいさの多い大論文の代表格は，「位置解析」に違いない．デンマークの数学者ヘーゴール（Heegård）が1898年にデンマーク語の論文でポアンカレの「位置解析」に徹底的な批判を加えている．要するに「数学になってない！」といわれてしまったのだ．ポアンカレは自分の記述が幾何学的・直観的であることはよく自覚しており，単体的複体に関する代数的なホモロジー論を構築することによって，議論の厳密化・単純化を図り，1899年に論文「位置解析への補足」（Compléments à l'Analysis situs），1900年に「位置解析への第2の補足」として出版している．その後さらに，1902年には「第3の補足」と「第4の補足」を出版する．これらはいずれも複素代数曲面のトポロジーに関する論文だった．マックス・ネターやピカールによる，リーマンの1変数代数関数論（複素代数曲線論）の2変数代数関数（複素代数曲面）への「拡張」の試みをトポロジー的な観点から支援するものだともいえるが，ヘーゴールがポアンカレを批判したのが複素代数曲面のトポロジーに関する

論文だったという事実とも関係があるのかもしれない.「第5の補足」の中心は3次元多様体に関する考察なのだが，最後の部分でポアンカレは，「[3次元閉多様体] Vの基本群が恒等変換に帰着され，にもかかわらず，Vが単純連結でないことが可能か？」(Est-il possible que le groupe fondamental de V se réduise à la substitution identique, et que pourtant V ne soit pas simplement connexe?) という問題を提出している．ここで，「単純連結」は，もちろん現在の「単連結」の意味ではなく，「3次元球面に位相同型」の意味だと解釈できる．これについてポアンカレは，短いコメントを書いてから「しかし，この問題は，われわれを遠い彼方に誘うだろう」(Mais cette question nous entraînerait trop loin.) と書いて「第5の補足」を結んでいる．こうして，論文「位置解析」が抱えていたあいまいさは，それを解消しようというポアンカレの「執念」によって多方面に燃えあがり，ついに，ポアンカレ予想を誕生させたのである．そういえば，「第2の補足」の最後の部分にあるように，ポアンカレは（やや現代化していえば）「すべてのベッチ数が1で捩れがない (sans torsion) 向き付け可能な閉連結多様体は超球面に位相同型である」という「定理」が証明できた気でいたようだ．フェルマにも似て「証明にはもう少し議論を展開する必要がある」が「論文が長すぎないようにするために」などと書き，証明は省略している．この「定理」は「ポアンカレ予想」の初期バージョンだといえそうだ[2]．「第5の補足」において，ポアンカレは自らこの「定理」に対する反例（3次元多様体で条件は満たすが基本群が自明でない例）を作り，そのあとで，はじめていわゆるポアンカレ予想に言及したのであった．いずれにせよ，あいまいさを残した121ページの論文「位置解析」が，合計225ページに及ぶ5つの補足論文の起源となったこと，そして，補足論文にまであいまいさが残っていたことは興味深い．そして，この大量のあいまいさこそが，ポアンカレ以後に，代数トポロジーという分野が形成されるきっかけとなったものでもあった．このようにして，あいまいさは，数学的創造への起爆剤でありうるのだ．

3. ヴィジョン体験

それはともかく，ポアンカレの論文にあいまいさが多かったのには理由がある．ポアンカレの脳は思索中の問題の「正解」を直観的なイメージで（いわばヴィジョンとして）形成する傾向が強かったように思う．ポアンカレは「夢見がちな脳」を持っていたのだと思えばいいだろう．数学の問題を考えはじめると，ポアンカレの場合，まずあれこれと試行錯誤を繰り返す意識的な段階があり，さまざまなアイデアや連想が生まれては消える．既知の技法を使ってただルーチン的な思索をしたり計算すればいいような易しい問題であれば，当然，この段階で解けてしまう．脳の記憶装置や参考文献に蓄えられていないような問題にアタックする場合には，類似の既知の定理の証明法や既知の問題の解法と比較したり，誰かに話すなり講義するなりして見解を求めることもあるだろうが，あれこれのアイデアや連想が出ては消えるだけで解決の道筋さえ見えないことが多い．ポアンカレによれば，このような段階で意識的な苦闘を行なってから，しばらくその問題を考えることから離れる段階（無意識が作動する段階）がやってくる．解けないから諦めたということとの区別は難しいが，ポアンカレの感触からすれば，このとき，意識から消えたというだけで，無意識下での「思索」が継続していたとしか考えられなかったはずだ．数学的創造のプロセスの中にこの無意識的段階が存在することの発見は，ポアンカレによる「無意識の発見」だと考えることもできる．ポアンカレがこのような「無意識の発見」体験について単行本の形で発表したのは，功成り名遂げてから書き，世界的なベストセラーとなった『科学と方法』[1] (1908年) の章「数学的創造」(L'invention mathématique) においてであった．

ポアンカレの体験談はつぎのようなものだ．フックス関数に関する一連の論文となる仕事を始めた

ころ，ポアンカレは，フックス関数にあたるものは存在しないことを証明しようと試みていた．2週間の苦闘の後に，ブラックコーヒーのせいで眠れなくなった夜に，夢見心地の中でさまざまな考えがフツフツと沸き立ち，その中の2つの考えが安定的な結合（combinaison stable）を作るように感じられたという．こうして瞬間的に「正解」が「見え」，（超幾何級数に対応する）フックス関数の存在が確信できてしまった．厳密な証明を書き上げるのは簡単なことだった．その後，ポアンカレは完全に意識的に（楕円関数論におけるテータ級数との類似性を信じて）テータフックス級数を構成することができたという．ほかにも，何の関係もない旅行中に馬車に乗ろうとした刹那に，フックス関数の定義に出てくる変換が非ユークリッド幾何の変換にほかならないという考えがひらめいたことがあったという．その後，数論の問題にアタックしたが成果があがらなかったので，気晴らしに海に出かけて散歩していたら，3元2次形式の数論的変換が非ユークリッド幾何の変換と「同じ」だというヴィジョン[6]がいつものように確信に満ちて意識に浮上してきたという．こうして，超幾何級数とは無関係なフックス群の存在に気づき，テータフックス級数の考えを適用して超幾何級数とは無関係なフックス関数の存在を証明できた．つぎに，すべてのフックス関数を構成しようと試みたがうまく行かず，兵役に服する時期になったが，兵役期間中にある町の道路を歩いているときに突然「正解」がひらめいた．ポアンカレは兵役が終了した後になって，その時のヴィジョンに基づいて難なく論文を書き上げることができたという．ポアンカレは「まず注目したくなるのは，それ以前に長い無意識的作業があったことの議論の余地のない証しである突然のひらめきの出現である」（Ce qui frappera tout d'abord, ce sont ces apparences d'illumination subite, signes manifestes d'un long travail inconscient antérieur;）（文献1) p.53）と書き，ヴィジョンが出現するための無意識的作業が存在することが自分の経験によって明らかだと主張している．

アルキメデスの「ヘウレーカ！」体験もこうしたヴィジョン体験の一例だ．ガウスもヴィジョン体験を報告している．ガウスは，成果があがらないままに，（ガウス和の）「符号の決定」という問題を4年間考え続けていたが，「数日前についに成功した．それは苦労の末というのではなく，ただ神の恩寵によるものだといいたいと思う．突然雷が落ちたように，謎が氷解したのだ」（Endlich vor ein paar Tagen ist's gelungen—aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloss durch die Gnade Gottes möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst;）[7] という（Räthsel = Rätsel）．証明を書き下すことは簡単だった．最近では，アラン・コンヌが「ひらめきにおける基本的特徴は，喜びを感じたその先で，もやが不意に晴れるといった突然の印象」（l'impression tout à coup qu'un brouillard se lève brutalement）だと述べている（文献8) p.201）．また，グロタンディークも「十分に見通しのきくあるいは理解の行き渡った最終的に「証明」を生成することのできるその洞察 [数学的ヴィジョン]」（··· der Einsicht, die durchdringend oder erschöpfend genung ist, um sich schliesslich “beweisen” zu können.）[9] と書いている．ヴィジョン体験によって，突然すべてが「見える」のである．

4. 無意識の自動運転

無意識という概念の決定的な提出はフロイトによるもので，神経症患者の症候の説明，失錯行為の説明，夢の分析などを通じて無意識（das Unbewußte）の概念に到達したのだった．こうしたフロイトの仕事は19世紀末には形をなしていたので，ポアンカレを単純に無意識の発見者だなどということはできない．でも，数学的創造のために不可欠なステージとしての無意識に注目したのはポアンカレが最初だったとはいえそうだ．ただし，ポアンカレが意識とは別のこころの働きとしての無意識についての明確な認識があったのかどうかとなると微妙な気がする．というのは，無意識

(l'inconscient) でも無意識性 (inconscience) でもなく, 無意識的作業 (travail inconscient), 無意識的自我 (moi inconscient) のように, 形容詞としての inconscient を使っているだけのように思えるからだ. 無意識的自我を潜在的自我 (moi subliminal) と同じものと見なした上で, なぜ無意識のうちに「正解」が生成され意識化してくるのかについて, ポアンカレは,「潜在的自我の自律的運動によって, すべての [意識的に考えたアイデアの] 結合が形成されるのだが, 興味深い結合だけが意識の範囲に入り込んでくるのだろう」(··· toutes les combinaisons se formeraient par suite de l'automatisme du moi subliminal, mais seules, celles qui seraient intéressantes pénétraient dans le champ de la conscience.)(文献 1) p.57) と書いている. そして, 美的感情 (sentiment esthétique) こそがこの意識化の鍵を握っているのだと述べている. つまり, 問題を解こうとして, あらかじめ意識的なプロセスで記憶 (無意識) の中に埋め込まれたさまざまなアイデア (ヒント) が,「無意識の自動運転」によって, さまざまに結合されたものがチェックされて, 美的感情というフィルターを通過しえたものだけが意識として浮上してくるといいたいのだろう. ポアンカレが結合というメタファーに拘るのは自分の体験に基づいたものだろう. ポアンカレは「無意識の自動運転」は超高速処理過程だと考えているようだが, 脳内のシグナル伝達速度はどの部位でもあまり違わない気がする. 意識は直列処理機構だが, 無意識は大規模並列処理機構なんだとすればこの問題は解決できそうだ. ひょっとしたら, ぼくが「無意識の自動運転」と呼んでいる過程 (文献 10) の文献参照) は, 中脳の腹側被蓋野に発する探索システム (並列処理的) の活動と大脳の高次の統合機能を担うとされる連合野の「機能異常」が生みだす現象なのかもしれない (白質異常と統合失調症や双極性障害のかかわりにも注目したい). その現象によって得られた「とりあえずの結論」がエンドルフィンを指令神経修飾物質として使う快システムによる「選別」を受けて, 明白に快の認定を受けたものだけが意識にヴィジョン (ドーパミン過剰による幻覚?) として浮上してくるのかもしれない. ヴィジョンの浮上はつねに快感を伴い「これは絶対に正しい」と無条件で強く信じているのだが, その後, 不可避的に突入する「厳密化」と論理的検証過程で間違いに気づいて排除されることが少なくない. ポアンカレのいうように美的感情による判断であれば間違っている確率は下がりそうだが, 大脳皮質が大きくコミットしていそうで, 意識的選別との区別がつきにくい. ただし, ポアンカレはヴィジョンという単語は使っていないので,「正解」が本当に視覚的に知覚されるのかどうかはやや不明確な面もある.

5. 数学的創造性と精神疾患

ポアンカレの夢見るような学習・研究スタイルはおそらく自閉症スペクトラムに属する高機能自閉症あるいはアスペルガー障害と無関係ではないだろう. 大きな創造性を示した数学者には, アスペルガー障害, 統合失調質障害 (Schizoid) や統合失調型障害 (Schizotypal), 双極性障害や強迫性障害などの気分障害 (Mood Disorders) などとの強い親和性をもつ人が多い[10]. ただ, 歴史上の数学者の病跡学的な診断結果を見ると, 研究者によって, アスペルガー障害だったり統合失調症スペクトラム障害だったり双極性障害だったりと必ずしも一致していない. ニュートンやアインシュタインのような詳しく研究されたケースについてさえ, 一致した見解は得られていない. これは, 症候 (symptoms) を並べて病名を決めるという診断方法に依存しているせいだ. 1 人の数学者がいくつもの精神疾患を合わせ持っていることもありうるわけだが, そう考えるよりもむしろ, さまざまな人格障害や発達障害の症候をもたらす脳の「異常」のいくつかが数学的創造性を発揮するために有効に機能しているのだと考える方が自然な気がする[12]. 高い創造性を発揮中のすぐれた数学者の脳を fMRI (functional Magnetic Resonance Imaging) や PET (Positron Emission Tomography) を使って観察したという研究結果はまだ

存在しないようだが，もしこれが出現しはじめれば，やがて，ある種の精神疾患の症候をもたらす脳の「異常」が数学的創造性のドライバーとなっていることが明らかになる可能性もあるだろう．すでに出現した数学的ヴィジョンを厳密かつ論理的に表現する作業やその学習は「正常な脳」の世界に属するが，革命的な数学的ヴィジョンの創造は（「非常に優秀な正常な脳」ではなく！）「異常性をもつ正常な脳」の世界に属するのだと思う．ポアンカレによる数学的創造についての自己観察を読んでいると，ぼくは，そうした方向に夢想を広げたくなるのを抑えることができない．

2007 年 8 月から理化学研究所と富士通が「将棋を指すことに伴う思考過程の fMRI による研究」などの共同研究をスタートさせているが，2008 年 7 月の発表によると，プロ棋士の脳の活動を fMRI で測定し，頭頂葉の頭頂連合野の後ろにあたる背内側部が活発化することを発見したという．この発見の意味するものが明らかになったとしても，数学と将棋には，「ゲームのルール」の改変を許すかどうかに決定的な差があるので，数学的創造性の解明への道はまだまだ遠そうだ．

参考文献

1) Henri Poincaré, Science et méthode, Flammarion, 1908.
2) Jean Dieudonné, A History of Algebraic and Differential Topology 1900–1960, Birkhäuser, 1989.
3) 齋藤利弥訳『ポアンカレ トポロジー』朝倉書店, 1996 年.
4) 齋藤利弥「ポアンカレと常微分方程式 1–3」『数学セミナー』1983 年 3–5 月号.
5) エレンベルガー『無意識の発見・上下』弘文堂, 1980 年.
6) 志村五郎『記憶の切繪図』筑摩書房，2008 年.
7) ガウスからオルバースへの手紙（1805 年 9 月 3 日）.
8) シャンジュー/コンヌ（浜名優美訳）『考える物質』産業図書，1991 年.
9) グロタンディークからファルティングスへの手紙（1988 年 6 月 27 日）.
10) 山下純一「岡潔の純情」『理系への数学』2007 年 3 月号.
11) ソームズ/ターンブル（平尾和之訳）『脳と心的世界』星和書店，2007 年.
12) Fitzgerald/James, The Mind of the Mathematician, The Johns Hopkins University Press, 2007.

（やました・じゅんいち）

特集／ポアンカレ

ポアンカレに学ぶ

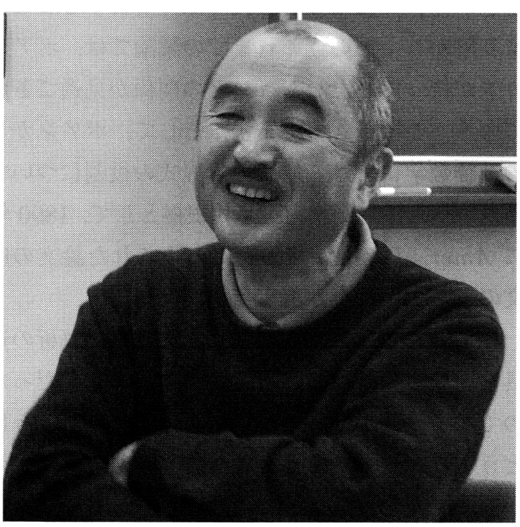


小島　定吉（聞き手：編集部）

1. ポアンカレの好奇心の広さと現代数学

——ポアンカレがその生涯の中で幅広く興味を持っていたことは特筆すべき点です．近年，数学が他分野と交流したり，連携している状況の中で何かポアンカレに学ぶべきことがあるように思いますが，いかがでしょうか．

確かにポアンカレが手を出した分野は数学や物理学，天文学，哲学と幅が広いのですが，現在の数学に見られる他分野との連携や交流の状況とは，100 年も前のことですし，違ったものなのではないでしょうか．ポアンカレが関係した，あるいは


小島定吉氏．

興味を示した分野は，現在に至るまで数学者が興味をもっています．だから，ポアンカレから直接学ぶべきものはすでに十分学んでいるのだと思います．

ところが，今の数学は物理や哲学以外の分野にも興味を向けなければならなくなりつつあります．例えば，計算機科学は 100 年前はありませんでしたが，今は様々な数学的なアイディアに対するニーズがあります．また，工学では 20 年くらい前までは微分方程式を解くと言っても，簡単に解けるものや少し難しくても数値計算を使えばよかったため，100 年前の数学だけで事足りました．それが最近ではもっと高度な数学を使うと，より素晴らしい工学ができるようになることがわかりました．こういったニーズにも答えることがこれからの目標ではないでしょうか．

そういう意味で，100 年前に数学者が興味をもっていたことに限定するのではなく，ポアンカレのようにもっと大きく捉えて研究をする必要があると思います．特に現代は，物事を広く捉えるには 100 年前とは少し状況が変わっていますが，ポアンカレのようなパイオニア精神を模範にすることが重要なのは確かです．

実は，昔は，興味を広げることはどちらかというと自発的にされていたと思います．これには歴史的証拠がいくつもあって，例えば，アインシュ

タインとポアンカレが並んで歩いている写真があるのですが，そういう場があったとすれば自然と会話をしたはずですから，そこから様々な議論に発展しますよね．ところが，最近話題に上る数学と他の分野の交流というのは，自発的な話ではなく，どちらかというと政策的な話，つまり，ニーズがあるから一緒に研究しなければなりませんよ，ということなんですよね．今のところそれが本当にうまくいくかどうかはわかりませんが，マスメディアや学術政策でもっと数学を役立てなければならないというプロパガンダがたくさん立ったとしても，本当に重要な部分を見過ごさないようにしなければなりません．

最近東京大学の柏キャンパスにIPMU（Institute for the Physics and Mathematics of the Universe，数物連携宇宙研究機構）が発足しましたが，ここでは，物理学，数学，天文学の3つをコンバインしたものを研究することになっています．偶然かもしれませんが，この3分野はポアンカレが研究していたものと重なっているんですよね．こうした研究機関は現存する研究所の中では世界初なんだそうですが，たぶん100年前は今述べた3分野はみんな一緒だっだのではないでしょうか．もっと昔の，例えば，ニュートンの時代などは，数学や天文学はみんな同じくくりだったのだと思います．

ポアンカレと同じく研究分野が広かった点で，もう一人，ポアンカレより前の時代になりますが，ガウス（1777–1855）がいます．最近では，“ガウス賞”でも名前を聞いたことがあるかと思いますが，これは2006年の国際数学者会議で，社会にインパクトをもたらす数学的貢献を挙げた研究者に贈る目的で創設されたもので，伊藤清先生が第1回を受賞されたことでも話題になりましたよね．どうして，ガウスの名を冠したかと言うと，ガウス自身も数学以外の分野で活躍していたからです．例えば，測量のための六分儀の開発がそうで，ドイツの通貨がマルクだったときには，紙幣にガウスの肖像と六分儀が載ったほどです．

ですから，いつの時代でも数学が社会に非常に貢献する可能性があるということです．幅が広いというのはその人が有能でない限りなり得ないわけですが，こうした背景があって，ポアンカレは歴史上類いまれな数学者の一人に数えられているのだと思います．

2. ポアンカレ予想をめぐって

——数年前にポアンカレ予想がペレルマンによって解決されました．この問題は位相幾何学の分野ですが，その証明方法を見てみるとリッチフローという物理にも関係するアイディアが用いられています．このこととポアンカレの興味の広さは関係しているのでしょうか．

ペレルマンによるポアンカレ予想の解決について，アメリカ数学会の雑誌『Notices』の2007年1月号のLetters to the editor欄の中に，H. Brezis, F. Browder, L. Nirenbergによる Poincaré's vision というタイトルの記事が載っています．多くの方がご存知でしょうが，三人の著者は偏微分方程式論および数理物理の第一人者です．記事は，トポロジーの手法で解決できなかったポアンカレ予想が非線形偏微分方程式を深く解析することにより解かれたというこれまでの議論では，ポアンカレが持っていたビジョンとの関係が見過ごされている，と指摘しています．そして，ポアンカレの純粋数学における偏微分方程式の役割についてのたいへん深い洞察力を示す根拠として，1890年に *Amer. J. Math.* **12** 巻に出版された論文の序文の一部を，彼らが自ら英訳しています．

幾何を対象にした現象を研究するのに解析の道具を用いるのは彼にとっては当り前のことだったのでしょう．ポアンカレ予想を定式化したときにどういう形で解けるかどこまで想定していたかわかりませんが，ひょっとしたら偏微分方程式を使うことを考えていたかもしれません．ですから，

むしろポアンカレにとっては全く意外な方法で解かれたというわけではないのかもしれませんね．

時代が進んでみると数学の中でも解析と幾何が分かれていき，トポロジーという分野がある意味でポアンカレの考えていたことから独立して，その中で解析はだんだん必要なくなり，3次元多様体論の中でポアンカレ予想だけが孤立していったように思います．それで長い間トポロジストたちが一所懸命研究してきた結果，まさか偏微分方程式を使うということは誰も考えていなかったという事態が起きてしまったわけです．実際に偏微分方程式を用いて解かれたことに驚いた人は多かったようで，NHKの番組でもやっていましたが，ポアンカレ予想がこの方法で解かれると困る，といった人が多かったようです．しかし，ポアンカレ自身にしてみればそのような方法も考えていたかもしれなかったわけです．

——そうしますと，ポアンカレが今の時代にもし生きていたとしたら，特に驚きもしない可能性もあるわけですね．

「大体，私の思ったとおりだ」と言うかもしれませんね（笑）．

ポアンカレ予想を書いた論文の最後に，「この問題は人類を果てしない混迷に連れて行くだろう」というようなことが書いてあります．彼自身もすぐに解けるとは思っていなかったのでしょうね．しかし，どういう風に解けるかという大まかなものはできていたのだと思います．自分はできないけれど50年後くらいに誰かが解くだろうと直観できる人がまれにいるのですが，ポアンカレもそういう人だったのではないでしょうか．

似たような話で，ポアンカレ予想を解決に至らせた幾何化予想を発表したサーストンが，以前来日して「数学セミナー」のインタビューを受けた際に，「自分が生きているうちかどうかはわからないけれど，幾何化予想はポアンカレ予想と同時に解ける」と断言しています．それから，およそ10年の月日を経て解かれたわけです．

——ということは，解かれるべくして解かれたのでしょうか．

今だから言えることですけどね（笑）．

ただ，天才と鈍才の大きな違いは，解ける可能性のある問題と解ける可能性のない問題の区別ができる，ということでしょうね．天才がこれは解けるかもしれないと言えば，100年くらい先になるかもしれませんが，実際にそれは解けるだろうけど，鈍才が同じことを言ったとしても一歩も進まないわけです．

3. ポアンカレの直観的思考

——数学者にもいろいろタイプがあるかと思います．直観力が個性のポアンカレに比べて，例えばヒルベルトのような数学者はむしろ対照的に思われますが，いかがでしょうか．

そうですね．これは私見ですが，歴史に残っているポアンカレとヒルベルトの業績を比較したとき，フランスとドイツの国民性——フランス人は，言っても言うことを聞かない人が多くて，ドイツ人はわりと几帳面な人が多い傾向があること——が関係しているかもしれませんね．

ポアンカレは「位置解析」という論文を書いたときに（1895年），何が解けるのかということではなく，何がこれから重要になるかということにスタンスを置いていたようです．つまり，これからの研究はローカルではなく，グローバルなものをシンプルに捉えていくことが重要だということだと思います．ちょうど，この時代はリーマン幾何学があり，幾何学はローカルなものとして認識されていましたから，ひょっとするとポアンカレの個性なのかもしれませんね．

このように，ポアンカレの書き方は「これからは位相幾何が重要です」というような漠然としたものが多かったわけですが，それに対して，「ヒルベルトの23の問題」を見ると，もう少し問題を具体的に提示してあって，これを解きなさい，とい

うような書き方をしていますね．

4．ポアンカレの業績

――先生ご自身がポアンカレやその業績の中で特に興味をもったものがございましたら，お聞かせ頂けますでしょうか．

そうですね．ポアンカレの残した業績はたいてい「ポアンカレ〇〇」と名前が付いていますよね．その中で，学生時代から勉強をして一番最初に出てきたのはポアンカレ双対性（Poincaré duality）でした．この理論を最初に勉強したのが学部の3年生の頃でしたが，その頃読んでいた本の中で私が理解したい最大の目標の定理でしたから，本を読み終わったときには大変感激しました．

この本は田村一郎先生の書いた『トポロジー』（岩波書店，1972年）という本で，かなりポアンカレの精神を引き継いだ書き方をされていました．つまり，いろいろなものを三角形で分割して，様々なことを計算して，ポアンカレ双対性をある意味で elementary な方法で証明してあります．それは実際にポアンカレが行った証明法とかなり似ていました．

それと，歴史が進むと，同じポアンカレ双対性でももっと非常にスマートな表現の仕方があって，その表現の仕方を習うと，一番最初に勉強したときよりももっと理解が深まるんですね．

――最後に後進の方へのメッセージをお願いします．

数学や物理だけでなく様々な方面へ進まれる方がいると思います．その人たちに共通して言えることは読書癖を是非とも付けてほしいということです．毎年，大学4年生のセミナーを見るときに，どの程度本を読んでいるか聞いてみると，非常によく読んでいる人と全く読んでいない人に分離される傾向にあります．

特に最近は，書店や図書館に行かなくてもネットなどを使って情報を手に入れられるようになっています．これは，ある意味で情報過多になっているのではないかと思います．それでオーバーフローしてしまい，自分が取り入れればよい情報の10倍以上の情報を取り入れてしまいます．それを避けるためにも本を読んでほしいですね．

――本日は貴重なお話をお聞かせ下さり，誠にありがとうございました．

（2008年2月，
東京工業大学大岡山キャンパス研究室にて）

（こじま・さだよし，東京工業大学大学院情報理工学研究科）

ジュール＝アンリ・ポアンカレ年譜．

1854年	フランスのナンシーで生まれる．
1875年	エコール・ポリテクニク卒業．
1879年	パリ大学で学位取得 （指導教官：エルミート）． カーン大学教授．
1880年	楕円関数，およびその他の一般化 （保型形式）．
1881年	パリ大学講師．
1885年	パリ大学教授．
1887年	アカデミー・デ・シアンス会員．
1889年	オスカー賞受賞．
1892年	『天体力学の新方法』（第一巻）出版．
1893年	『天体力学の新方法』（第二巻）出版．
1895年	「位置解析」の論文を提出．
1899年	『天体力学の新方法』（第三巻）出版．
1903年	『科学と仮説』出版．
1904年	ポアンカレ予想が提出される． セントルイス博覧会講演のため訪米．
1905年	ボーヤイ賞受賞． 『科学の価値』出版．
1908年	『科学と方法』出版． アカデミー・フランセーズ会員．
1910年	『科学者と詩人』出版．
1912年	7月17日永眠（58歳）．

「数理科学」は語る

30年前から現代へのメッセージ

本多 久夫

1978年10月号

「特集―形（かたち）」に「樹木の幾何学模型」を書いて30年になる．当時は形の研究についての思いがありながらまだ言葉にならない，何かが生まれる胎動期と言ってよい時期であった．その後「形の物理学」や「形の科学」が生まれ現在に至っている．この事情は後ほど述べる．

形の研究についての思いは，あの頃それぞれの研究者にそれぞれあったのだと思う．雪の結晶，粒子の凝集パターン，熱対流がつくるパターン，河川の分岐，樹木の枝分かれなどの研究者がいた．寺田寅彦の物理学やD'Arcy W. Thompson の “On Growth and Form” に自分の思いに近いものを感じた方も多い．私の場合，生物体に幾何学が見られることに注目して（樹形に分岐した線分の連なりが，組織に多角形の細胞が見られる）これまでにない生物の研究が進められないかという思いをもった．そこで，生物体に構成単位（二股分岐や細胞）の繰り返しや集団があると見なした．樹木は二股分岐の繰り返しである．組織は多角形細胞の集団である．それなら一つの構成単位を記述する方法を考案すれば，その繰り返しや相互作用で生物体が作れるのではないか．物理学では原子や分子が単位となって結晶ができるが，生物体の単位はもっと活動的である．自前のエネルギーを持ち，その場その時点での周囲（環境）を感知し変化できるから活動は一通りではない．この単位の集団が自己構築（自己組織化）して生物の形ができるのである．このような見方をすると，長年の生物学の課題である遺伝子が生物の形をどこまで支配しているかの問題にもアプローチできるようになる．遺伝子は構成単位–細胞の性質や能力を決めているだけである．具体的な形は，（遺伝子によって性質が決まった）細胞たちの行う自己構築による．したがって自己構築にバリエーションがあれば，遺伝子が同じだからといって同じ形ができるとは限らない（例えば本多編『生物の形づくりの数理と物理』2000年）．



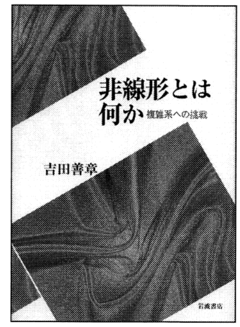
30年前の私たちそれぞれの形の研究に対する思いは，1980年から始まった小川泰先生が世話役の京都大学基礎物理学研究所研究集会「形の物理学」で互いの思いを確認し，1985年発足の「形の科学会」http://wwwsoc.nii.ac.jp/form/ に引き継がれ，現在に至っている．この活動が基になって2003年には高木隆司編『かたちの事典』，2004年には形の科学会編『形の科学百科事典』が出版された．後者は毎日出版文化賞を受賞した．

現在，科学研究は細分化され過ぎた点に反省がなされ，境界領域・学際・総合という言葉を聞くようになった．科学を多くの人々の間で共感できる知的興味に戻すのは「形」だろう．「形」は多くの科学の分野を横断している．

（ほんだ・ひさお，兵庫大学健康科学部）

非線形とは何か
複雑系への挑戦

吉田善章著，A5 判，216 頁，本体 3300 円，岩波書店



野心的なタイトルの本である．『非線形とは何か』――誰もがその答えを喉から手が出るほど欲しがる問いであろう．結論を述べると，「複雑性を読み解く」という視点から，この大きな問いに一つの解答が与えられていると言ってよいだろう．

本書は 4 つの章から構成されている．

第 1 章では，線形理論の成立過程とその構造を批判的に分析し，その「不適切さ」を指摘すると共に，線形と対立措定された非線形性の重要性とその特徴が簡潔に述べられている．自然とは，元来，非線形（複雑，偉大，気まぐれ）であり，近代科学はそれを単純化・理想化・分離することによって多大な成功を収めてきたが，その方法論の根底には線形理論が位置していた，とする．予測不可能で無限に多様な自然を理解するために，分断された要素間の連関と合成を可能にする方法論を探求し，現象のスケールに関するパースペクティブを持つことによって，単に数学的構造の二項対立としての「線形–非線形」としてではなく，科学の原点に遡及する問題として分析する必要があると主張する．次に，線形理論を概観して「法則と空間構造が一体化した理論」と要約し，「複雑なからみ合いの現象」として非線形を特徴づけて，例としてローレンツ方程式系を挙げて「カオス」に言及する．さらに，非線形の類型について述べ，「特異点，不連続性，臨界点，分岐」等，非線形科学の沃野に横たわるキー・コンセプトを手際よく紹介している．

以上で本書の骨格を形成するメッセージは出揃った．第 2 章から第 4 章は非線形の意味をより具体的に明示することに費やされている．

第 2 章は，規則性（秩序）という切り口から「線形–非線形」に光が当てられている．規則性（秩序）の数学的指標として「関数表現」を用い，関数表現できない運動の出所は系の分解不可能性にあるとしている．非線形の特徴の一つは相互作用の無限連鎖であり，これが分解不可能性の原因となり得ると指摘する（線形系は常に分解可能である）．さらに，先に「関数表現」と呼んだものを保存量として掘り下げ，運動の深層構造としての変分原理（ラグラジアン・ハミルトニアン）を介して保存則と対称性を等置し，規則（秩序）と呼んだものは可積分性に他ならないとする．カオス（不規則性・複雑性）とは，この規則性（可積分性）の喪失した状態（非可積分性）であると定義する．

第 3 章は，カオスの現象的特徴としての「予測困難性」を数量的に客観化するためにリアプノフ指数を導入し，非可積分性とリアプノフ指数の関係を分析する．決定論の世界における予測困難性をカオスの問題とする一方，大自由度系における原理的な予測困難性を扱うために，大多数の粒子からの影響をランダムな効果として取り入れ，推移確率によって運動を記述する視点が紹介されている．H 定理を介して等重率が証明され，ミクロ・カノニカル集合上に変分原理を適用して統計的平衡状態を記述するギブス分布が導かれている．さらに，非平衡系を理解するために，集団運動モデルから出発して，確率的揺らぎをもつマクロモデルとして平均場理論が展開される．

第 4 章は，「ミクロとマクロの連接」という難問に，現象と法則における多様な時空スケールの問題としての視点から切り込んでいる．複数の時空スケールを自律的に生み出す機構の根源に「非線形性」が関与していることを克明に暴き出し，異なる階層に分離されたスケール間を「連接」する鍵の一つが「特異摂動」であるとする．異なるスケールの現象が混在し，完全な秩序でもなく完全な無秩序でもない状態が「複雑性」の姿であり，その根底に非線形性と特異摂動の協働が横たわっていると結論している．

以上，本書の内容を少し強引に概観したが，至るところに含蓄深い言葉がちりばめられており，科学（線形・非線形を問わず）に興味を持つ人には是非一読してほしい本である．読者としての我が儘を言わせていただくと，この本の各章をそれぞれ一冊の本として膨らませたものが出版されることを望みたい．

坂元 国望（広島大学大学院理学研究科）

視覚の科学と数学

ウェーブレットで探る錯視の世界

第3回

視覚の非線形数理モデルと錯視発生のシミュレーション

新井 仁之

3.1 非線形ウェーブレット・フィルタバンク

今回は視覚の数理モデルとそれを用いた錯視発生のシミュレーションを中心に話を進めていく．まず我々の非線形数理モデルの基本となるのは，前回述べたように双直交ウェーブレットを用いた最大重複方式のフィルタからなる（線形）フィルタバンクである．このフィルタバンクには2種類あり，一つが分解バンク，そしてもう一つが合成バンクである．視覚の数理モデルには分解バンクを用いる．合成バンクは別の用途で使用するが，それについては次節で述べる．

分解バンクではまず入力信号 x をレベル1の最大重複双直交ウェーブレット・フィルタ（スケーリング・フィルタ a_1，水平方向のウェーブレット・フィルタ h_1，垂直方向のウェーブレット・フィルタ v_1，対角方向のウェーブレット・フィルタ d_1）によりサブバンド信号に分解する．それらは循環たたみ込み積[*1] $a_1 * x$, $h_1 * x$, $v_1 * x$, $d_1 * x$ で与えられる．さらに $a_1 * x$ を今度はレベル2の最大重複双直交ウェーブレット・フィルタ a_2, h_2, v_2, d_2 により $a_2 * a_1 * x$, $h_2 * a_1 * x$, $v_2 * a_1 * x$, $d_2 * a_1 * x$ と分解する．さらに $a_2 * a_1 * x$ を同様の操作でレベル3のウェーブレット・フィルタによりサブバンド信号に分解する．そして同様にしてより高いレベルの分解を行っていく．

レベルが上がるほどウェーブレット・フィルタの長さは長くなる．ウェーブレット・フィルタの長さは受容野の大きさに対応する概念である．心理物理学に「多重チャネル説」という定説があるが，レベルの違いはチャネルの違いに相当するものと考えることができる．

さて，前回述べたように，視覚は大域的で非線形的な情報処理を行っている．そこでこの分解バンクのサブバンド信号にそれを数理モデル化したものを付加する（図 3.1 の「N」の部分）．視覚の大域的・非線形的な情報処理にはいくつかのものが知られているが，今回，我々が取り上げたいのは，次のようなものである：

> 画像の中に大きなコントラストの差があるときには，小さなコントラストの差は抑制され，大きなコントラストの差がないときは，小さなコントラストの差は強調される．

このような情報処理が視覚系で行われていることを見るため，前回も述べたが我々は図 3.2 のような錯視を考案した．さらに視覚には方位に関する処理も加えられている．例えば画像の中に，ある方

*1） 循環たたみ込み積の定義は，例えば新井[1]参照．

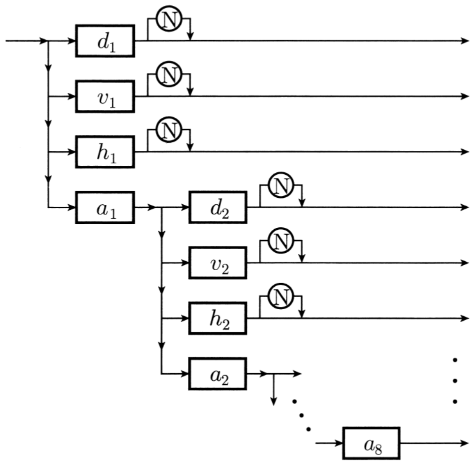


図 3.1　分解バンクに非線形処理「N」を加える図式.

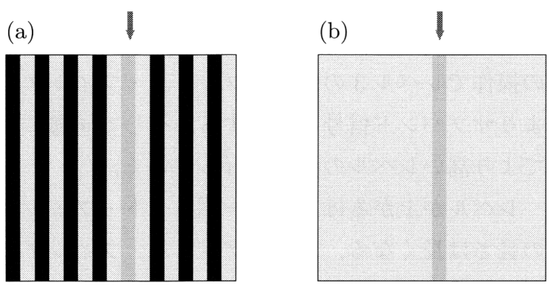


図 3.2　矢印で示したストライプは同じ輝度であるが，周囲にコントラストの差のある (a) のほうが (b) より薄いグレーに見える.

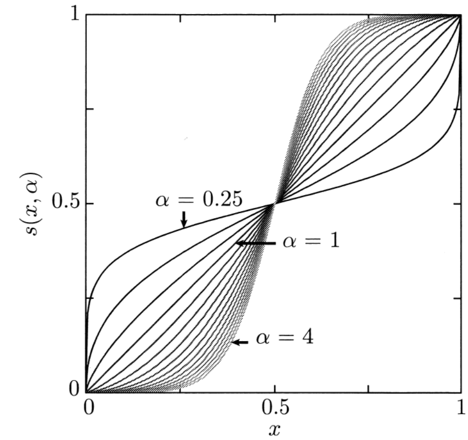


図 3.3　SN 関数 $s(x,\alpha)$ のグラフ.

向の成分が多い場合，同じ方向の成分に対する反応が弱くなる．1972 年に C. Blakemore と E.A. Tobin は実際に神経科学的にこのようなことがあることを報告している（福田・佐藤[3]参照）．また垂直，水平成分に比べて，斜め成分に対する知覚の能力が弱いことも知られている．画像処理ではこの特性を利用して，画像の対角線方向のデータを水平，垂直方向よりも多く間引くという方式がある．

以上のことは実際の視覚系が行っている情報処理であり，我々はこれらの数理モデル化を行った．そのアイデアの概略を簡単に述べておく．我々はまず次の関数を考案した（新井[2]）：

$$s(x,\alpha)=\frac{x^{\alpha}}{x^{\alpha}+(1-x)^{\alpha}},\quad 0\le x\le 1,\quad 0<\alpha.$$

これは図 3.3 のようなグラフをもっている．$\alpha=1$ の場合が線形関数であり，α が 1 より 0 に近づくと N 字型になり，α が 1 よりも大きくなると S 字型，いわゆるシグモイド関数と類似の形状になる．我々はこの関数を **SN 関数**と名づけた．この関数のパラメータ α を以下に述べるように適切に変えることにより，我々はフィルタバンクが抑制と興奮を入力画像に応じて実現できるようにしたのである．パラメータ α により S 字型から N 字型に滑らかに変化していくこの関数を見出したことが，数理モデルを構成するのに大いに役立った．α の定め方を述べるが，今回の計算機シミュレーションは 256×256 画素で 256 階調のグレースケール画像で行っている．色知覚の数理モデルについては後の回で述べることにする．$\boldsymbol{Z}_{256}=\{0,1,2,\cdots,255\}$ とおき，$\boldsymbol{Z}_{256}\times\boldsymbol{Z}_{256}$ から複素数体 $\boldsymbol{C}$ への写像全体のなす線形空間を $l^2(\boldsymbol{Z}_{256}\times\boldsymbol{Z}_{256})$ により表す．画像データ $x=(x\,[m,n])_{(m,n)\in\boldsymbol{Z}_{256}\times\boldsymbol{Z}_{256}}$ は $l^2(\boldsymbol{Z}_{256}\times\boldsymbol{Z}_{256})$ に含まれる元と考えることができる．入力 x に対して，y_k^h, y_k^v, y_k^d をそれぞれレベル k の水平方向, 垂直方向, 対角方向のサブバンド信号 x_k^h, x_k^v, x_k^d に適切なノーマリゼーションを施したものとする．そして方向とレベルによって

$$\alpha\left(y_k^{\varepsilon}\right)=\begin{cases}0.8\left\|y_k^{\varepsilon}\right\|_{l^2}^{1/8}+0.4, & \varepsilon=h,v,\\ 0.4\left\|y_k^{\varepsilon}\right\|_{l^2}^{1/4}+0.8, & \varepsilon=d\end{cases}$$

$(k=1,\cdots,8)$ と定義する．ここで $\|\cdot\|_{l^2}$ は $l^2(\boldsymbol{Z}_{256}\times\boldsymbol{Z}_{256})$ の正規化 l^2 ノルムである．なお現れる数値 0.4, 0.8 等は，実験的に見出したもの

で，選び方は必然的に一意的に決まるというものではない．視知覚は正常な視覚をもつ人に共通な特性をもっているが，多少の個人差がある．数値が違えば数理モデルの出力は全く同じというわけではないが，これは個人差の現れと言ってよいだろう．また水平，垂直の場合と対角の場合で数値を変えてあるのは，先に述べた視覚の特性による．このように定めたパラメータに対する SN 関数により，サブバンド信号を修飾し，それを $F_k(x_k^\varepsilon)$ により表す．詳細は新井[2]に譲り，本稿では，実際にこれが様々な錯視の発生をシミュレーションできることを述べることにしたい．

3.2 錯視発生のメカニズムの解析

初めに若干の用語の準備をしたあと，図 3.2 の錯視のシミュレーションを示す．それから古典的な錯視に関するいくつかの問題について論じていくことにする．

3.2.1 準備

錯視のシミュレーション結果を可視化するために，合成バンクを用いる．合成バンクとは図 3.4 で表されるものである．ここで左側の横線は図 3.1 の右側の矢印に示される入力がされる．そして入力されたサブバンド信号が分解フィルタ a_j, h_j, v_j, d_j に対する合成フィルタ $\widetilde{a}_j, \widetilde{h}_j, \widetilde{v}_j, \widetilde{d}_j$ により合成されていくのである．

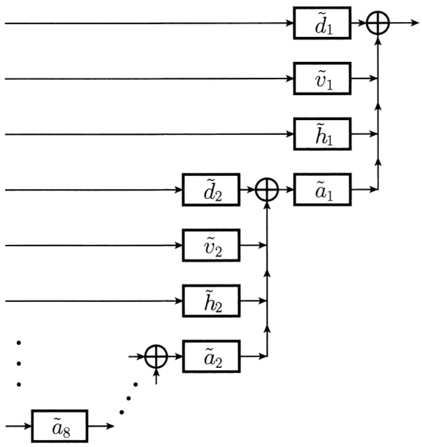


図 3.4　合成バンク．

いま入力 x に対して

$$\Delta_j = \widetilde{h}_j * F_j(x_j^h) + \widetilde{v}_j * F_j(x_j^v) + \widetilde{d}_j * F_j(x_j^d),$$
$$z_k = \Delta_k + \widetilde{a}_k * x_k^a,\ z_{k-1} = \Delta_{k-1} + \widetilde{a}_{k-1} * z_k,$$
$$\cdots$$

とし，$\widetilde{x}_k = z_1$ とおき，これをレベル k の非線形多重解像度画像と言うことにする．ここで x_k^a はレベル k の近似部分のサブバンド信号である．

ところで実際の視覚系には合成バンクのように分解された信号を完全に統合する単一の主領野は存在しないと考えられている（Zeki[6]参照）．あくまでもここでは合成バンクをシミュレーション結果の可視化のため，技術的に利用しているだけである．

3.2.2 大域的・非線形的な錯視

まず，図 3.2 の錯視が今回述べた我々の数理モデルでシミュレーションできることを示しておく．図 3.5 (a) と (b) はそれぞれ図 3.2(a) と (b) に対するレベル 8 の非線形多重解像度画像の輝度のグラフの水平方向に沿った断面である．中央のストライプの部分は，図 3.5 (b) のほうが (a) よりも 0（黒）の方向に窪んでいることがわかる．つまり図 3.5 (b) のストライプのほうが (a) のそれよりも濃いグレーに見えるという錯視のシミュレーションができていることを示している．これは前節で述べた大域的・非線形的な情報処理の結果，生じたものである．我々の数理モデルを用いると，さらにいくつかの古典的錯視について，統一的な計算機シミュレーションと数学的な解析を行うことができる．

3.2.3 ヘルマン格子錯視の数学的解析

ヘルマン格子錯視については，すでに前回詳し

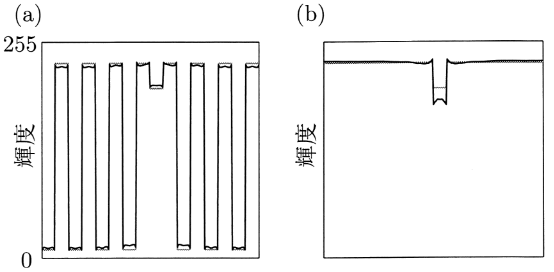


図 3.5　図 3.2 の錯視のシミュレーション．

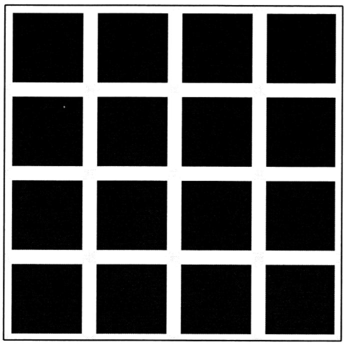


図 3.6　ヘルマン格子の出力画像（レベル 8 の非線形多重解像度画像）．

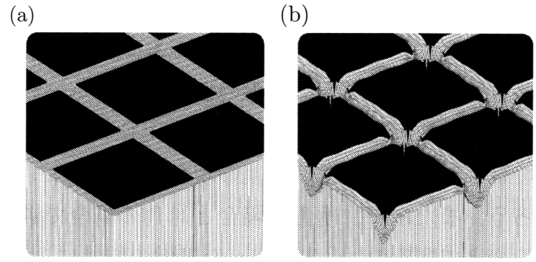


図 3.7　(a)：原画像，(b)：レベル 8 の非線形多重解像度画像の輝度のグラフ．

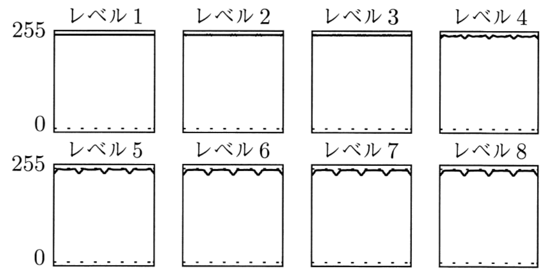


図 3.8　各レベルの非線形多重解像度画像の輝度のグラフ．

く述べた．問題となったことは，網膜以降の視覚系の情報処理もヘルマン格子錯視発生に関与していると考えられるいくつかの証拠が挙がっていることであった．もし網膜以降の情報処理が絡んでいるとすると，どのような情報処理が関与しているのであろうか？ 我々の数理モデルを使って，この問題を研究してみる．まずヘルマン格子の画像（第 2 回，図 2.8）を入力して，その出力（図 3.6）を見てみよう．確かに白い路の交差点の部分に薄暗いスポットが出現している．今回は錯視ではなく，現実に薄暗いスポットが存在している．ただし薄暗いスポットは存在しているが，我々が見るときには，それにさらにヘルマン格子錯視の効果が上乗せされていることに注意しておくべきであろう．そういった煩わしさを避けるために，出力画像を輝度のグラフで表すことにする．縦軸で輝度を表し，0 が黒であり，数字が増えるごとに白っぽくなっていき，255 が白を表しているものとする．ヘルマン格子の原画像（第 2 回，図 2.8）は図 3.7 (a) のようになる（ただし輝度のグラフの一部を載せている）．もしもヘルマン格子錯視が現れるならば，縦の座標が 255 のところに位置する白い路の中で，交差点の部分が 0 の方向に少し窪むはずである．そして実際に出力画像（レベル 8 の非線形多重解像度画像）を表記すると図 3.7 (b) のように確かに白い路の交差点の部分が下に窪んでおり，ヘルマン格子錯視がシミュレーションで現れていることがわかる．図 3.7 (b) はレベル 8 の非線形多重解像度画像であるが，他のレベルはどのようになっているかを図 3.8 に示しておこう．このグラフはヘルマン格子の中央を通る水平線に沿った断面においてシミュレーション結果を表示したものである．このことから，ヘルマン格子錯視は主にレベル 4 から 6 くらいで顕著に現れていることがわかる．

ところで実際の我々の知覚の場合，中心視では薄暗いスポットはほとんど現れず，むしろその周辺の十字路で現れる．これは網膜上の視細胞の分布と受容野の大きさに由来し，V1 レベルにおける網膜部位再現の幾何的な特性に起因している．詳しく言うと，網膜レベルでは中心窩付近の視細胞の受容野が小さく，このことから網膜部位再現では中心視の部分は周辺視に比べ拡大して投影されている．拡大したヘルマン格子に対しては，レベル 8 でもレベル 3 程度の効果しか出ないため，ヘルマン格子錯視は現れない．今回のシミュレーションでは考慮に入れていないが，中心視から周辺視に渡って大域的なシミュレーションを行なうためには，網膜部位再現を数理モデルに組み入ればよい．

最後に一つコメントを加えておきたい．図 3.7 (b) では，交差点の部分だけでなく，白い路の中

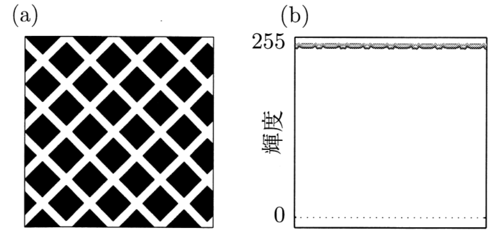


図 3.9　斜めのヘルマン格子 (a) とシミュレーション結果 (b).

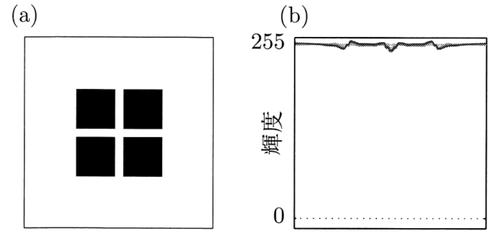


図 3.10　格子の数が少ないヘルマン格子 (a) とそのシミュレーション結果 (b).

央にもやや薄暗い線が現れていることに気が付かれるであろう．実際，ヘルマン格子には，その薄暗い線が錯視として見える．

次に前回問題とした Spillmann の現象，Wolfe の現象のシミュレーションが可能かどうかを試してみよう．図 3.9 (a) が斜めのヘルマン格子，そして (b) は斜めのヘルマン格子の対角上の白い路の中心に沿った断面においてシミュレーション結果を重ね合わせて表示したものであり，レベル 1 から 8 までを徐々に薄いグレーから濃いグレーの線で表している．斜めのヘルマン格子錯視が通常のヘルマン格子錯視よりも弱いことが, 我々の数理モデルでシミュレーションできていることがわかる．次に格子の数を少なくした場合のシミュレーションを行ってみよう（図 3.10）．この場合も実際に我々が知覚するように，ヘルマン格子の錯視量が減少していることをシミュレーションできている．

以上のシミュレーション結果は，次のようなことを数学的に示している：前回述べたように例えば Spillmann[5)] はヘルマン格子錯視発生については，網膜以降の視覚情報処理の寄与もあるとしている．我々の今回のシミュレーションは，その説を数学的に支持している．さらに一歩進んで，具体的にどのような大域的・非線形的情報処理からヘルマン格子錯視に関する既述の諸現象が生ずるかも明らかにしている．

3.2.4 シェブルール錯視

図 3.11 はシェブルール錯視と呼ばれているものである．例えば中央の黒いストライプから左に 2 番目のグレーのストライプを見てほしい．我々の知覚では，このストライプの左端が濃いグレーで，右に行くにしたがってこのストライプは次第に明るいグレーになり，右端にある隣のストライプとの境界線は，明るく光っているかのように見える．しかし実際は各ストライプの輝度は一定になっている（図 3.12 参照）．

この錯視の発生に対してもヘルマン格子と同様に，網膜などにおける側抑制に基づく説明がある．しかし次のような興味深い事実が指摘されている（Ratliff, 1984; 詳細は川人[4, p.358)]参照）．図 3.13 はコントラストの差の小さいストライプを並べたもの（図 3.13 (a)）と，コントラストの差が大きいストライプを並べたもの（図 3.13 (b)）である．(a) の右側のストライプの左側の境界の部分は明るく見えるが，それは錯視である．これに対して (b) の場合にそのような錯視は現れていない．も

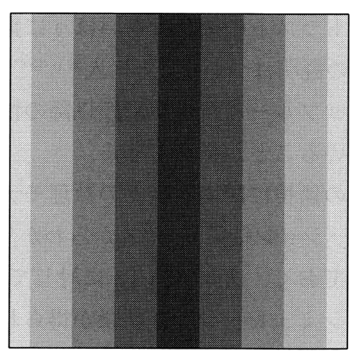


図 3.11　シェブルール錯視.

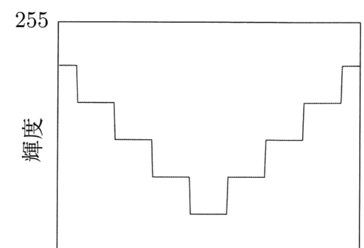


図 3.12　図 3.11 の輝度．各ストライプの輝度は一定になっている.

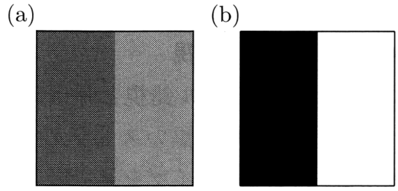


図 3.13　視覚の非線形性を表す錯視．

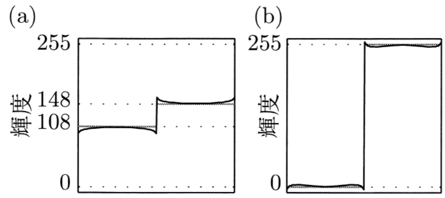


図 3.14　図 3.13 の出力画像の輝度．

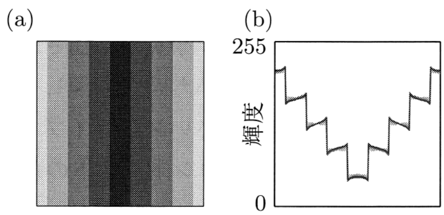


図 3.15　(a)：シェブルール錯視のシミュレーション画像．(b)：(a) の輝度をグラフにしたもの．

し側抑制など線形的な議論に基づいて考えるならば，コントラストの差が大きいほうに錯視が生じないことの説明はつかない（川人[4, p.358]）．このことからシェブルール錯視も網膜以降の情報処理が関与していることが推測できる．

これらの錯視に関する我々の数理モデルによるシミュレーション結果と，それからわかることについて述べておく．まず図 3.13 に対しては図 3.14 のようなシミュレーション結果が得られる．したがって，図 3.13 で示された錯視の有無の現象は，今回数理モデル化した大域的・非線形的情報処理で説明できることがわかる．さらにシェブルール錯視に対しても我々の数理モデルで図 3.15 (a) のような結果が得られる．この出力画像では，実際に各ストライプでの輝度の錯視がシミュレーションできている．ただしこの出力画像を我々が見たときには，出力画像に対するシェブルール錯視の効果も累積されてしまう．そこで (a) の水平断面における輝度の変化をグラフにしたものを図 3.15 (b)

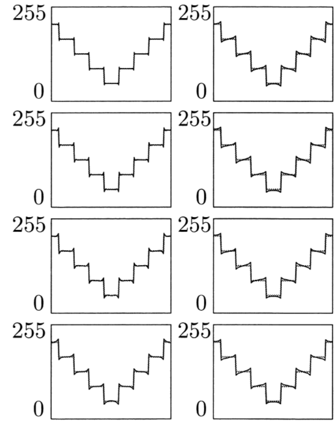


図 3.16　シェブルール錯視のシミュレーション．左の上から下にレベル 1, 2, 3, 4．右の上から下にレベル 5, 6, 7, 8 が順に並べてある．

に併せて載せた．レベル 1 から 8 までの非線形多重解像度画像を徐々に薄いグレーから濃いグレーの線で表している．各レベルの非線形多重解像度画像を別々に描いたものが図 3.16 である．これにより，低いレベルでは各ストライプの境界の明暗が強調され，レベル 3 から 5 で各ストライプにおける輝度のなだらかな傾斜が現れることがわかる．

このように V1 における情報処理もシェブルール錯視の発生に寄与していることが数学的に示された．そしてさらに側抑制による線形計算では説明できない現象も我々の数理モデルでは説明できることがわかった．

我々の考案した数理モデルにより，他の錯視の解析も可能であるが，それに関しては次回に回すことにしたい．また次回は我々の視覚系が錯視を起こすことの意味についても，数学的な観点から論ずる．

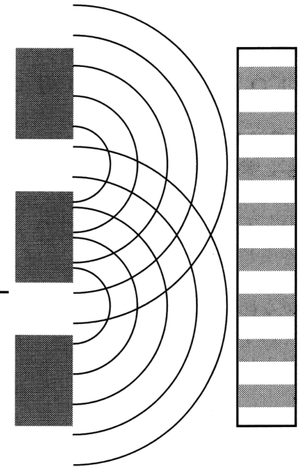
参考文献

1) 新井仁之，『フーリエ解析学』，朝倉書店，2003.
2) 新井仁之，*Interdisciplinary Information Sciences*, **11** (2005), 177–190.
3) 福田淳，佐藤宏道，『脳と視覚—何をどう見るか』，共立出版，2002.
4) 川人光男，『脳の計算理論』，産業図書，1996.
5) L. Spillmann, *Perception*, **23** (1994), 691–708.
6) S. Zeki, *Sci. Amer.* **267** (3) (1992), 68–76.

（あらい・ひとし，
東京大学大学院数理科学研究科/科学技術振興機構さきがけ）

目で見て学ぶ量子力学

第5回 実験でひもとく量子の不思議



目で見る波動関数

外 村　彰

5.1 はじめに

“電子” とは一体何者なのか？ 観測すると，常に小さな粒子なのに，自分に比べてずっと大きな原子を包み込んで，原子の外形を作る．どうして，そんなことができるのだろうか？——量子力学は，この素朴で基本的な疑問から誕生した．

電子は1個の粒子として観察され，二分されたためしはない．それなのに，単なる “電荷を持つ粒子” ではない．粒子だとしたら，原子は安定に存在し得ない．水素原子の中では，たった1個の電子が原子核の周りをものすごい勢いで周回していることになる．電子は電磁波を放射してエネルギーを失い，原子はあっという間に崩壊してしまうはずである．

原子の安定性は，電子が定在波の形で原子核の周りを取り巻いているというL. ド・ブロイの仮説によって説明できたものの，今度は粒子性を説明できない．この電子の持つ二面性は，以来，研究者を悩ませ続けることになる．

今回は，常識では不可解としか言いようのない “量子力学の基本問題” に，先端技術の進展によって実証の道が開かれるようになった実例を紹介したい．まずは，基本問題の重要性やその不思議さの説明から始めよう．

5.2 基本は重要

量子力学は，E. シュレディンガー，W. ハイゼンベルグ，N. ボーアたちの努力で完成を見たものの，最も肝心で最も基本的な部分は，未だに議論を呼んでいる．例えば，「電子が検出されたとたんに波が破壊されて，粒子の姿が現れる」という下りになると，実験屋としては，本当にそんなことが起こるのか，どんなプロセスでそんなことが生じるのか，などの直接の証拠が欲しくなる．

A. アインシュタインやシュレディンガーは，生涯，量子力学の解釈に満足し

[傍注1] 観測したとたんに，波動関数が一点に収縮するのを嫌って，世界が並行してたくさん存在していると考える．観測が行われると，いくつもの世界は独立な世界となり，観測者は，その1つの世界だけを見ることになる．

なかった．また，波動関数の収縮を不満に思う研究者は，多世界解釈[傍注1]を考え出し，天文学者の中にはこの考え方を支持する人たちが増えつつある．だが，これも実証の術がない．

一方，量子力学は，その適用範囲をどんどん広げていく．原子分子よりも，さらに小さな世界の存在が明らかになり，量子力学は，そこでも成立することが分かった．それだけではない．今や“広大な宇宙”にまで量子力学は適用されようとしている．量子力学の対象は物理に止まらない．化学，生物など自然界のすべてをも支配する勢いである．

しつこくこだわり続けたアインシュタインは物理学の最先端から取り残され，手ごわい量子力学の基本問題は，生産性のないテーマとして置きざりにされた．確かに，不思議で納得がいかないかもしれないが，量子力学で説明できない実験結果は何一つない．R.P. ファインマンの言うように「こんなテーマにチャレンジすると，袋小路に入って一生を棒にふってしまう」かもしれない．だからと言って，基本問題が重要ではないと言うことにはならない．

量子力学がこれほど普遍的な法則であるということを考えると，“その基本は，極めて重要である”に違いない．自然を理解する上で新たな進展の芽が潜んでいるかもしれない．

1980年代になると，先端技術の驚異的進展によって，頭の中でしか考えられなかった思考実験も実現可能になり，“量子の不思議”が目のあたりに見えるようになってきた．こうして量子力学の基本問題も再び関心を呼ぶようになった．それだけではない．アインシュタインたちがどうしても納得いかないと思っていた現象が，量子コンピューターや量子通信などといった実際上の応用[傍注2]に適用されようとしている．量子力学の最も基本的な現象ならば，それも当然である．今後さらに広範な分野に顔を現す気がする．

[傍注2] 1つの量子が複数の状態を取ったり，波動関数が観測によって壊れてしまうことを利用するのが，量子コンピューターや量子通信である．第18回で触れる．

5.3 不思議な“波動関数”

古典力学では，電子は電荷を持った小さな粒子である．電子の位置と速度が分かれば，電子のその後の振舞いは決定し，未来は予測できた．ところが，量子力学では，そもそも電子の位置と速度を，同時に決めることはできない．電子の状態は“波動関数”Ψ で表される．電子がどこにいるのかを検出すると，“粒子”の姿になって現れる．その代わり，電子の速度は分からなくなってしまう．位置を検出したとたんに波動関数は一点に収縮してしまう．

波動関数の振舞いは，シュレディンガー方程式で記述される．粒子の振舞いがニュートンの運動方程式で決まるのと同じである[傍注3]．電子は，たとえ1個でも，2つのスリットを同時に通って後方で干渉する．もはや電子は粒子ではなくなったのかと思うかもしれないが，そうではない．広がっている波動関数 Ψ も，検出すると1点に収縮して粒子になる．どこに電子が姿を表すかは時の運で，理論的に予測することはできない．どこら辺に現れそうか，ということならわかる．$|\Psi|^2$ が，電子がやってくる確率分布を与える．1個の電子を観察

[傍注3] この連載を始めるにあたって，40年も前，学生時代に読んだ朝永振一郎の『量子力学 I, II』(みすず書房，昭和27年，昭和28年) を読み直した．量子力学が基本から見事に書かれていて感銘を新たにした．シュレディンガー方程式が何故 $i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{\hbar^2}{2m}\nabla^2\Psi$ の形になったかといった説明もある (II 巻 p.17–21)．

しただけでは，干渉縞は観測できないが，同じ実験をくり返せば，電子の到着位置の分布として干渉縞が描かれる．

電子1個1個を観測できる時代の実験屋としては，電子のやってくる位置すら“予測”できない量子力学は，何と情けない理論かと思ってしまう．量子力学は，電子1個1個の振舞いを予言することはできないが，同じ現象をくり返したときの電子の集団的な振舞いを予言することはできる．

我々がふだん観測している波は，水面の波紋であれ，音波であれ，電波であれ，“観測可能な量”の時間的・空間的変化として記述することができる．水面の高さであり，空気の濃度であり，電磁場の強さである．例えば，水面の波面は，水面の位置が一番高くなる点の軌跡として決めることができる．波紋は目で見えるが，シュレディンガー方程式の解は，“複素数”なので，電子の波は目で見えない．電気回路の特性を計算するときに，計算上の便宜のために複素数を使うことはあるが，波動関数は本質的に“複素数”で，波面を定めることはできない．

しかし，幸いなことに2つの波を重ねて干渉させたときの“波面のずれ”（位相差）ならば問題ない．波動関数そのものは見えないけれども，平面波と干渉させたときに生じる干渉模様から位相差を観測できる．

5.4 スピン

電子は，これまで説明した波動関数 Ψ だけですべてを表現できる訳ではない．電子には，もう1つの“スピン”という自由度がある．

スピンは，“粒子が自転しているときに生じる角運動量”を意味するが，電子が本当に自転している訳ではなく，たとえでしかない．さらに分かりにくいことに，電子は，スカラー[傍注4]の波動関数で表すことはできない．スピンが角運動量であるというのなら，我々の知っているベクトルかと思うと，そうでもない．

［傍注4］ ベクトルは3つの数で表せるのに対して，スカラーは1つの数で表せる．

例えば速度は，ベクトルである．大きさだけでなく方向を持つ．物理量には，電場，磁場など，ベクトルで表せるものがたくさんある．また，物質の歪みは，テンソルで表せる．ゴムひものような1次元物質であれば，歪みは（変化した長さ）/(元の長さ）というスカラー量で表されるが，3次元物質の歪みは加えた力の方向にだけ生じるわけではないので，3行3列の行列のテンソルになる．スピンをもつ粒子の波動関数は，ベクトルともテンソルとも異なった“スピノール”という量で表される．

スピノールは，電子が有する自由度（スピン）を探していく過程で見出された．スピノールは，特異な性質を持っている．物体は，一回転すると元に戻るが，スピノールは元に戻らない．マイナスの符号がついてしまう．朝永振一郎は，このことについて『スピンはめぐる』（みすず書房，2008年，151頁）の中で，こう述べている．

> 物理的にも，この二価性から困ることは何も出てきません．なぜかというと，量子力学で物理的意味を持つのは $|\Psi|^2$ の形の量であって Ψ 自身ではないからです．ですから Ψ 自身は360° 回転で $-\Psi$ になっても，$|\Psi|^2$ は

ちゃんともとの値にもどり，物理的結論のなかに Ψ の二価性は決して顔をださないのです．

しかし，この性質は中性子線の干渉実験が可能になって，実験的に観測できるようになった．中性子の波動関数も電子と同様スピノールで表せる．中性子線の強度 $|\Psi|^2$ だけを観測しても，波動関数 Ψ が $+$ なのか $-$ なのかを判断することはできないが，干渉現象を使うと判別できる．中性子線のスピンの向きを一回転させ，参照となる中性子線と干渉させたときの干渉模様の強度は，Ψ が $-\Psi$ に符号が変わると，変化する．こうして $-\Psi$ の効果が観測できることになる．

ここでスピンに関わる電子線の干渉性能についても触れておきたい．我々は，レーザーのような干渉性のよい電子線を40年近くも追い求めてきた．しかし，果たしてレーザー光に匹敵できるような電子線が得られるのだろうか？ 仔細に検討してみると，電子は干渉性という面からみて，光とは本質的に異なった性質をもつ．光子はスピンが1なので，ボース粒子[傍注5]に属し，いくつもの光子が同じ状態になることができる．レーザー光では，たくさんの光子を同位相にして何十 m もつながった長い波を作ることができる．

他方，電子はスピンが1/2で，フェルミ粒子[傍注6]に属するので，いくつもの電子が同じ状態にはなり得ない．複数の電子が同じ位相になって，“一つながりの波”にはなり得ない．この意味では，電子線はレーザーのような干渉性をもつことはできない．しかし，たくさんの干渉縞を得るには，フェルミ粒子であるという点は，今のところ障害にはならない．電子顕微鏡の中では，1つの電子が二分されて，両者の間で起こす干渉現象を積算して観察する．問題は，次々とやってくる電子が同じ干渉縞を作るように，エネルギーと進行方向の揃った電子線を作ることにある．電子線の平行度を良くすると電流密度が減少するので，輝度の高い単色性のよい電子線が必要になる．

ここでは電子の波動関数が干渉縞の形で観測できるようになったことと，スピノールの二価性が中性子の干渉実験で検出できるようになった実験を紹介しよう．

[傍注5] スピンが整数の粒子をボース粒子と言う．正確には角運動量が $\hbar$（プランク定数の $(1/2\pi)$）の整数倍の粒子のことを指す．光子はスピンが1である．

[傍注6] スピンが半整数の粒子をフェルミ粒子と言う．フェルミ粒子同士が同じ状態になることは許されない．“パウリの原理”と呼ばれている．

5.5 電子線で見る波動関数

電子の波動関数は，電子線ホログラフィーを使って見ることができる．とは言っても，複素数の波動関数を直接“見る”訳にはいかない．電子の参照波[傍注7]を重ねて干渉縞の形で見ることになる．電子線ホログラフィー技術の詳細については，次回にまかせて，ここでは電子の波動関数の観察例を紹介したい．

三角形のコバルト微粒子を透過した電子の波動関数の観察例を図5.1に示す．透過波を平面波を重ねることによって，波面の等高線が描かれている．この微粒子を，透過電子線の強度分布で電子顕微鏡像として観察すると，微粒子の輪郭だけしか見えない．透過電子線の波面の等高線を示した干渉顕微鏡像では，たくさんの干渉縞が現れる．これは，電子の波が微粒子を透過すると，波面（位

[傍注7] 波動関数を“見る”ためには，“見たい波”に“波面の分かっている参照波”を重ねて干渉縞を作る．干渉縞をフィルムに記録したものは，“ホログラム”と呼ばれる．ホログラム・フィルムにレーザー光の参照波を照射すると，電子の波面（波動関数）が光で再現する．

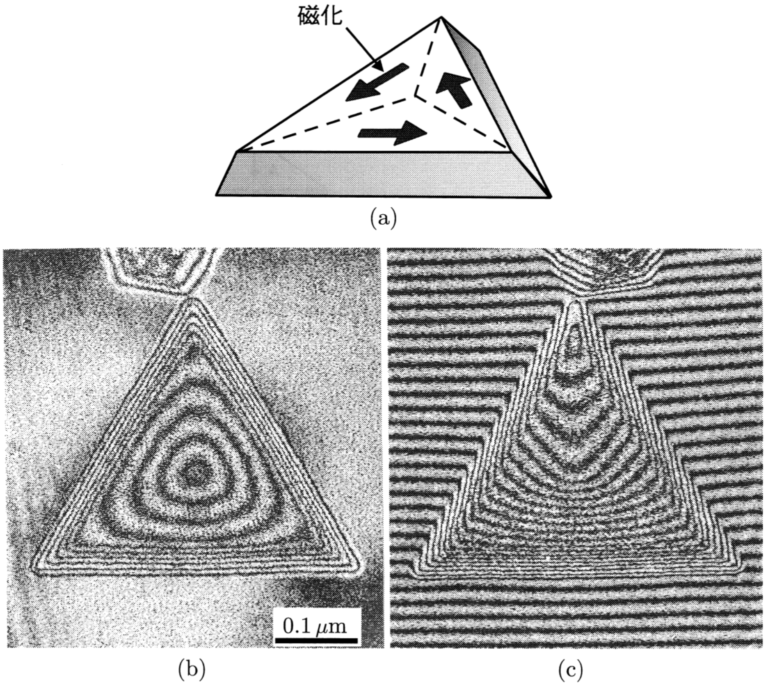


図 5.1　コバルト微粒子を透過した電子線の波面の等高線．(a) 模式図，(b) 干渉顕微鏡像，(c) Interferogram（干渉顕微鏡像）．
この粒子の場合，厚さと磁化の 2 つの影響が波面に現れている．電子顕微鏡では，三角形の輪郭だけしか見えないが，干渉顕微鏡像には，2 種類の等高線が現れる．(b) で 3 辺に平行で密な等高線は，厚さが 550 Å まで増加していることを示している．それより内部の領域は，厚さが一様であるので，等高線は磁力線を示す．この場合の磁力線の回転方向は，(c) から左まわりであることが分かる．

相）が変化するからである．

8 万ボルトの電圧で加速した電子線は，光速の 1/2 のスピードなので，厚さ 500 Å の微粒子を，エネルギーをほとんど失うことなく通りぬける．ただ，微粒子内部を通り抜ける際に電磁ポテンシャルを経験するため，位相変化を受ける．物質内部は，電子に対してポテンシャルが 10〜30 ボルト低くなっている[傍注 8]．この仕組みがあるからこそ，自由電子が金属外部に流れ出すのをくい止められる．物質を通過中の電子は，内部電位分だけ加速されて波長が短くなる．微粒子を通って出て来た電子は，微粒子を通らなかった電子に比べて位相が変化している．この位相変化は，物質の厚さと内部電位に比例する．均一な物質なら，厚さに比例した位相変化が生じる．実は，コバルト微粒子の場合，位相変化はこれだけではない．

［傍注 8］　この電位は物質固有の値をもち，“内部電位” と呼ばれている．コバルトの内部電位はおよそ 30 ボルト．

コバルトは強磁性体[傍注 9]なので，内部に磁場が存在する．入射した電子線は，この磁場によっても位相変化を生じる．高速電子線が，微粒子を通過する際，電子軌道はほとんどまっすぐで，強度も変化しない．しかし，位相は磁場によっても変化する．正確に言うと，ベクトルポテンシャル $\boldsymbol{A}$ の電子軌道に沿っての線積分（$\int \boldsymbol{A} d\boldsymbol{s}$）に比例する位相変化を受ける．これは，第 8 回と第 9 回に出てくるア

［傍注 9］　鉄，コバルトなどの磁石になる材料を強磁性体と言う．原子のスピンが揃って磁場が内部に存在する．

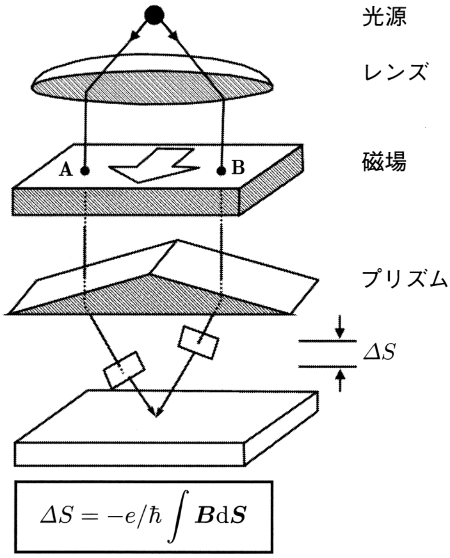


図 5.2 電子の位相と磁場．A, B 2 点を通る電子線の位相差は，2 つの軌道が取り囲む磁束に比例する．点電子源から出た 2 本の電子線が磁性体薄膜の A, B を通り，干渉させるために再び一点に集まる．

ハラノフ・ボーム (AB) 効果で詳しく述べる．このことを使うと，驚くほど簡単な結論が得られる．磁場を通過した電子波の位相の等高線は磁力線に一致する！しかも干渉縞は一定の磁束（$h/2\mathrm{e} = (6.62 \times 10^{-34}\,\mathrm{Js})/2 \times 1.60 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} = 2.07 \times 10^{-15}\,\mathrm{Wb}$）毎に現れる．電子線の速度に依らないことになる．以下に理由を説明しよう．

サンプル上の 2 点 A, B を通る 2 本の電子軌道の位相差を考える．もし 2 点がサンプル内部の 1 本の磁力線の上に乗っているとすると，A と B を通る 2 本の電子線の位相差はゼロになる（図 5.2）．なぜなら A, B を通る 2 つの電子線の間には，$\int_{\mathrm{A}} \boldsymbol{A} \mathrm{d}\boldsymbol{s} - \int_{\mathrm{B}} \boldsymbol{A} \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ に比例した位相差が生じる．この積分は，2 つの電子軌道の 1 つを逆向きにしたときの閉回路に沿っての周回積分 $\oint_{\mathrm{A-B}} \boldsymbol{A} \mathrm{d}\boldsymbol{s}$ に一致する．この閉回路に沿っての $\boldsymbol{A}$ の線積分は，$\boldsymbol{B} = \mathrm{rot}\,\boldsymbol{A}$ を使うと，閉回路の内部を通る磁束に等しくなる．つまり $\oint \boldsymbol{A} \mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int \boldsymbol{B} \mathrm{d}\boldsymbol{S}$ である．ところが，2 点 A, B が 1 本の磁力線上にのっている場合，閉回路を貫く磁束はゼロになるので，A, B 間での電子線の位相差はゼロになる．もし h/e の磁束を含むときには，一波長分の位相差を生じる．

この知識を利用すれば図 5.1 を直感的に解釈できる．三角形の三辺に沿って生じている密な干渉縞は微粒子の厚さ分布を示す．模式図で示したように厚さは 550 Å まで次第に増加している．それより内部の領域は厚さが均一なので，内部の干渉縞は磁力線を示している．

干渉顕微鏡像は，波面の等高線を示したものだが，この写真だけでは波面が飛び出しているのか，ひっこんでいるのかは分からない．波動関数の位相変化が正か負かに対応する．この情報は，電子線ホログラフィーの光再生段階で参照波を傾けて得られる Interferogram[傍注10] から得られる．これによって磁力

[傍注10] 再生像と同じ方向から参照波を重ねると，波面の等高線が干渉縞として描かれる．地図の等高線と同じである．地図でも，高さ何メートルと表示していないと山だか谷だか分からない．波面の凸凹を判定するためには，参照波を傾けて波面を横から見れば良い．このとき得られる干渉縞（Interferogram）から，波面が山か谷か，あるいは位相が正か負かが判断できる．

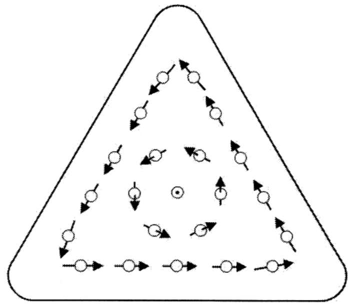


図 5.3　コバルト微粒子内のスピンの模式図.

線が入射電子線の方向から見て左回りに回っていることが分かる.

電子の波動関数から得られる情報は，これだけではない．この像から磁壁幅[傍注11]が 400 Å であることが分かる．粒子内部の磁場は原子のスピンによって生じたものだが，電子線ホログラフィーによって 10 Å の空間分解能でスピンの流れを捉えることができるようになった.

［傍注 11］　強磁性体に磁場をかけると一方向にスピンの向きが揃って磁石になる．通常は，あちこちを向いた小さな磁石に分かれている．これを磁区（Magnetic domain）と呼ぶ．磁区と磁区の境界が “磁壁” と呼ばれる．通常，磁壁では，スピンは連続的に向きを変えていく．この幅が “磁壁幅” である.

粒子の中心部分を詳細にみると，さらに面白いことが分かる（図 5.3）．波面は完全な円錐ではなく，先端は半径 150 Å の領域で半球面状になっている．微粒子内部のスピンは膜面内に寝ながら回転しているが，粒子の中心に近づくと，次第にスピンは膜面に垂直になることが理屈から推測されていた（図 5.3）．それはスピンが寝ながら回転しているとすると，スピンは，中心に近づくと，ほんのわずか移動しただけで，向きを大きく変えなければならない．そもそも強磁性体では，スピンは平行になりたがる．急に向きを変えるとエネルギーが増大する．このため，中心に近づくにつれてスピンは次第に膜面に垂直に立ち上がる.

この様子を調べるには，位相差増幅法を使って波面を詳細に調べても良いが，実際には電子線ホログラフィーを使った微小領域電子回折法[傍注12]によって決定された．粒子の中心の半径 150 Å の領域内になると，スピンが少しずつ膜面から立ち上がり始め，螺旋を描いて，中心でまっすぐに立ち上がる．こうした振舞いは，電子線ホログラフィーによって初めて直接観測された.

［傍注 12］　電子線を磁性体薄膜に入射させると，磁化面内成分によってローレンツ力を受けて偏向される．磁化の向きや磁化の膜面内成分によって偏向方向や偏向の角度が決まる．小さな領域からの電子線回折像を得ると，電子線がその領域でどれだけ偏向されたかが分かる．このため磁化の面内成分が求められる．ホログラムから微小領域の電子線回折像を得ると，スピンが粒子の中心部分でどのように立つかが定量的に分かる．中心ではスピンは垂直に立ち上がるので電子線と磁場が平行になり，電子線は偏向されない.

ここで波動関数の不思議に触れておこう．図 5.1 (a) で示したコバルト微粒子の中心部分に小さな丸い孔をあけてみる．そして，その孔の中を通る電子線と微粒子の外側を通る電子線の位相差がどうなるかを考えてみる．孔は磁力線に沿った形でくりぬいてあるので，磁力線は孔の中にもれたりしない．孔の中も，粒子の外側も，いずれも電場も磁場もない単なる真空である．孔の中や粒子の外部を通る電子の波動関数は，何らかの影響を受けるのだろうか？ AB 効果によれば，ベクトルポテンシャルによって波動関数の位相が変化するので，孔の中を通る電子と粒子の外側を通る電子線との間に位相差が生じ，干渉縞のずれとして観測できる．電子は磁場に触れなくても，位相差が生じることになる．この議論の詳細は，第８回，第９回で行う.

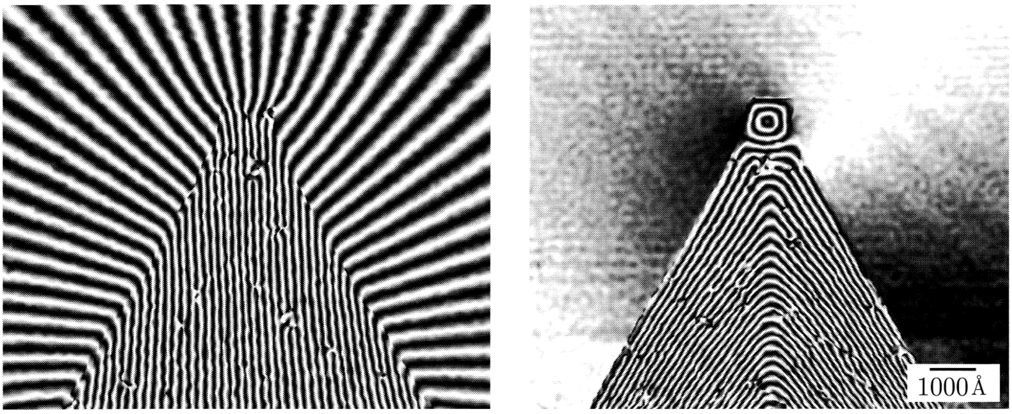


図 5.4　電子線ホログラフィーで見た磁気ヘッドからの磁力線．(a) 上下方向に磁場をかけたときの磁力線．(b) 印加磁場をゼロにしたときの磁力線．

最近，磁気ヘッドから出てくる磁力線をも捉えることができた[1)] (図 5.4)．磁気記録は，磁気ヘッドから出てくる磁力線を，上向きにしたり，下向きにしたり，時にはゼロにするなど，自在にコントロールする必要がある．強い磁場を出すには，磁化の大きな材料を使って上下方向に磁化すれば良いので簡単だが，むしろ外部の磁場をゼロにするほうが難かしい．図 5.4 (a) で，磁気ヘッド内部で上下に走っている磁力線を，一体どのように仕向ければ良いか？ 内部の磁力線を全く消滅させる訳にはいかない．図 5.4 (b) のように，U ターンさせれば良い．ヘッドの先端では，閉じたループを描く．磁化の大きな材料を用いると，履歴によって異なった状態が生じる上，外部に磁場がもれてしまうことがある．ミクロな磁力線の情報は磁気ヘッドの設計に役立つ．

5.6 中性子線で見る波動関数のスピン効果

中性子は，電子と違って電荷をもっていない．その代わり，電子と同様，1/2 のスピンを持っている．電荷を持たないので電磁場との相互作用は弱いが，それに代わってスピンが相互作用する．このことを利用すると，逆に電磁場中で中性子のスピンの向きを変えることができる[傍注 13]．中性子の質量は陽子と同じで，電子の 2000 倍もある．このため重力効果が干渉現象として捉えられる．また中性子の波長は，同じエネルギーの電子に比べると，ずっと短い．例えば室温で熱運動をしている中性子の波長は 1.5 Å である．電子の熱運動のエネルギーは，常温では 0.04 ボルトなので，波長は 19 Å である．電子の波長を 1 Å にするには 150 ボルトまで加速しなければならない．

中性子の干渉実験は，干渉計の実現によって可能になった．原型は X 線干渉計である．単結晶に入射した X 線や中性子線は，結晶面でブラッグ反射[傍注 14]を起こして透過波と回折波に分かれる．結晶板を 3 枚組み合わせると，光のマッ

［傍注 13］ 電子に磁場をかけてスピンの向きを変えようとしても，電荷に大きな力が働くので，電子軌道を変えずに電子のスピンの向きだけを変えることは難しい．

［傍注 14］ X 線，中性子線，電子線など原子間隔に近い波長の短かい波を物質に当てると結晶格子面で反射を起こす．ブラッグ条件を満たしたときに反射が起こるので，ブラッグ反射と呼ぶ．

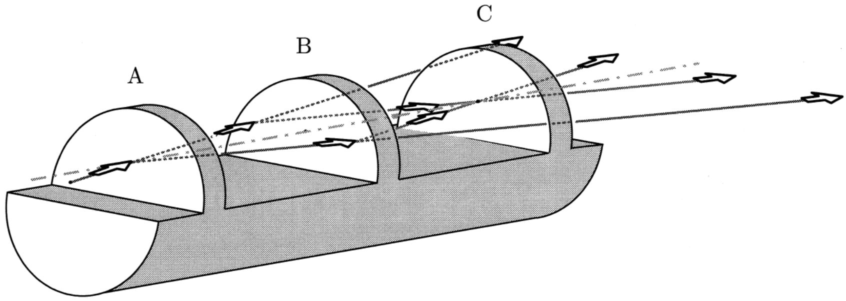


図 5.5　中性子線干渉計．1つの単結晶から切り出した3枚の単結晶でマッハ・ツェンダー干渉計を組むことができる．矢印は中性子線の進行方向を示す．

ハ・ツェンダー干渉計[傍注15]に対応したものになる．(図 5.5)．干渉計として使うには，結晶性の良い単結晶が必要になるが，さらに3枚の単結晶の平行度も完璧でなくてはならない．このため，10 cm 以上もの大きなシリコン単結晶から切り出して作る．先端技術の賜である．

スピンをもつ粒子の波動関数がスピノールによって表せることの証拠は中性子線干渉実験によって得られた．まず中性子線を強磁性体の単結晶に当てて，ブラッグ反射を起こし中性子線のスピンを偏極[傍注16]させる．これを干渉計に入射し，二分した中性子線の片方のスピンだけを回転させる．すると，360° 回転させても，干渉強度は元の値に戻らない．波動関数 Ψ が元通りにならず，$-\Psi$ になるためである．720° 回転させて初めて元通りに戻るというスピノールならではの不思議な特性が，中性子の干渉実験によって直接観察できるようになった．

[傍注15]　L. マッハと L. ツェンダーが考え出した光の干渉計．光を，その進行方向に対して 45° の角度に置いたハーフミラーに当てて，透過光と反射光に分ける．これら2つの光をそれぞれミラーで反射させて，1カ所に集め，そこにもう1つのハーフミラーを置いて，干渉させる．2つのミラーと2つのハーフミラーを矩形に配置できるので，2つの光路を大きく分けられる．このため光路に位相物体などを挿入して位相変化を観測できる．

[傍注16]　中性子は 1/2 のスピン角運動量を持っている．中性子は電荷を持っていないので磁気モーメントがないと思うかもしれないが，負の値を持つ．このため磁場をかけると，磁場とは逆の方向にスピンの方向を変えることができる．ある種の磁性体結晶でブラッグ反射を起こさせると，スピンが揃った中性子線が得られる．これを偏極（polarized）中性子線と呼ぶ．

5.7 おわりに

干渉性の良い粒子源や干渉計の開発によって，今や電子や中性子といった物質波の波動関数が観測できるようになり，量子力学の不思議な振舞いが観測できるようになった．

本原稿は，学習院大学名誉教授の江澤洋先生に見ていただいた．ここに感謝の意を表する．

参考文献

1)　J.J. Kim, K. Hirata, Y. Ishida, D. Shindo, M. Takahashi, and A. Tonomura: “Magnetic domain observation in writer pole tip for perpendicular recording head by electron holography” *Appl. Phys. Lett.* **92** (2008) 162501.

（とのむら・あきら，日立製作所フェロー／理化学研究所グループ・ディレクター／沖縄科学技術研究基盤整備機構代表研究者）



私はどうして数学者になったか

河東　泰之

1. 子供の頃

小学校２年生の頃，将来なりたいものという作文で，「数学者になりたい」と書いた．もちろん当時は数学者がどのような職業かはよくわかっていなかったが，算数・数学が特別に好きだ，そういうことを仕事にしたい，ということは記憶にある限りの昔からずっと明確に考えていた．

母親も数学が得意だった．大学の専攻は化学で，昔のことで専業主婦だったが，計算はきわめて速くて正確で，もっと抽象的な数学も得意だった．私が中学１年生のときに病気で亡くなったが，その頃までは私と話が通じるくらいに数学はできたと思う．他の親戚には特に数学の得意な人はいなかった．

最初のうちは計算が得意だという程度のことだったが，方程式というものが重要なものであり，それは中学校で習うものだと何かで小学校４年生の頃に知った．それをぜひ自分で勉強したいと思い，本屋で中学校の問題集を買ってきて練習したところ，すぐにできるようになって，とても役に立つものだと思った．連立方程式でも２次方程式でも同じようにできたので，中学受験の際，一切算数の勉強はしないで済んで便利だった．

同じく４年生の頃考えた問題に，図１の中央の部分の面積を求めるというものがあった．全体は正方形で，４つの曲線はすべて円周の $1/4$ である．これは有名な問題なのだが当時はそんなことは知らず，単にこの図が教科書にデザインとして出ていたのを見て，面積が求まるはずだと思ったのである．昼間から丸一日考えて夜遅くになって解けたのを覚えている．（この問題を解くのには，一辺の長さが 1 の正三角形の高さは $\sqrt{3}/2$ だということが必要だが，それは知っていた．）

さらにこの頃，家にあった数学の一般向けの新書を読んだ．著者は矢野健太郎だったような気がするがあまり自信がない．その最後のほうに，デデキントの切断の説明があった．何度も読んだがどうしてもわからなかった．今考えるとそもそも，ちゃんとわかるように書いてあったとは思えないのだが，何か割り切れない気持ちが残った記憶がある．

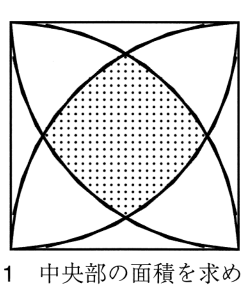


図１　中央部の面積を求める．

さてその後，麻布中学に入ることになった．中学入試が 2 月に終わったので，高等数学の代表と思っていた微分積分をぜひ勉強したいと思った．本屋に行って高校用の参考書を適当に選んで，当時数学 IIB と呼ばれていた，多項式の微分積分を自分で勉強したところ，中学に入る前にすぐ終わってしまった．その参考書はかなり易しい内容のものだったのだが，どれが易しくてどれが難しいかもよくわからなかったのである．

その後中学校に入って，微分積分を自分でもう少しやってみると，そもそも自分は三角関数も指数対数関数も知らず，したがって，それらの入った微分積分は当然できないということがわかった．数学 IIB には多項式の微分積分しかなかったので最初気づかなかったのである．（目次に微分積分というのが入っている本を適当に一冊買っただけで，他には何も見なかったのだった．）そこでこれらの勉強も始めて，さらに同じ理由でベクトルや行列も飛ばしていたことも気づいたので，やはりこれらも同じ頃勉強した．そして中学 1 年の夏から秋にかけて，「大学への数学」と「数学セミナー」を見つけて読むようになった．とても熱心に端から端までよく読んだと思う．

数学は論理の積み重ねだから順番にきちんと一歩ずつ学んでいかなくてはいけない，などとよく言われるが，この頃は順番など全く無視していた．「大学への数学」で受験問題を解いたり，「数学セミナー」を読んで「エレガントな解答を求む」をやったり，『解析概論』を読んだり，みな平行してやっていた．（『解析概論』が重要な本であるということは「数学セミナー」で知った．すぐに買ってきて読み始めた．）さらに群論でも線形代数でも手当たり次第に読んだ．「エレガントな解答を求む」で最初にできた問題は，「$\sqrt[3]{n}$ より小さいすべての自然数で割り切れるような最大の自然数 n を求めよ」というものである．正解者のところに「中学 1 年生!」とカッコつきで載ったのがうれしかった．1 年間くらいは熱心にやっていたと思う．『解析概論』も同じ頃熱心に読み，最初のほうの ε–δ 論法を初めとする厳密な解析学は，かなり真面目に勉強してちゃんとわかったと思った．前にわからなくて気になっていた切断もこのときわかるようになった．また，現在京都大学にいる中島啓氏と同級生で，しょっちゅう休み時間にトランプをしていたのもこの頃である．

数学者にも一般の人にも，初等幾何学が面白かったと言う人がよくいるが，私はめちゃくちゃな順番で勉強していたので，初等幾何より先に，ベクトル，三角関数，複素数などを学んだ．そのため，ちっとも幾何学的な証明をやる気が起こらなかった．私は三角形の内心より先に，デデキントの切断を学んだのである．今中学生の子供に初等幾何の問題を聞かれても，式を使わないでどうやってやるのかすぐにわからないことがしばしばある．

その後，ルベーグ積分，関数解析，また数学基礎論などに興味を持って，手当たりしだいに本は買って読んだ．超準解析に興味を持ったのもこの頃である．のちに線形代数を習うことになる，齋藤正彦先生が「数学セミナー」に超準解析の連載をしており，それが本となって出版されたのであった．本郷にある数学洋書の専門店の友隣社にも，東大数学科の図書館にもこの頃よく行ったが，とにかく順番など気にせず，かたっぱしから読んだ．よくわかったものも，全くわからないものもあったが，あまり気にしていなかった．数学書を読むことがとにかく好きだった．ブルバキの日本語訳や，岩波講座の「基礎数学」もこの頃買ったものである．

高校時代の最後になるが，広中平祐先生が始めた高校生対象の夏の合宿セミナー「数理の翼」というものが，私が高校 3 年生のときに始まった．このとき 40 人くらい高校生が来ていたと思うが，4 人が数学者になった．文科系も含めて，他の分野で学者になった人もかなりいる．このセミナーは今も続いており，私も何回かは講師として参加したが，とてもよいことだと思う．これを続けていくのには経済的にいろいろ困難があるらしいが，さらに発展を続けてほしいものである．

2. パソコンとの出会い

さて数学は一人で勉強するのにもだんだん限度が出てきたし，試験は得意だったので他に勉強することも何もなく，毎日とても暇であった．少し時代が戻るが，私が中学2年生のとき，日本初のマイクロコンピュータ・キット TK-80 が発売になった．これはキーボードもディスプレーもなく，16 進数のキーと，8 桁の LED がついているだけのものだった．これを技術者だった父が買ってきて，弟が半田ごてで組み立てたのである．(完成品ではなく，部品をバラで売っていたのだ.)

これは大変面白いと思った．使える高級言語は何もなかったので，8080 のマシン語でプログラムを書いた．自分でまず紙に 16 進数のコードを書き，それを手で 16 進キーを使って入力するのである．そのうちに大半のコードは覚えてしまった．例えばサブルーチンを呼びだす CALL 命令のコードは CD である．(16 進数には数字が 16 個必要で，0 から 9 まででは足りないので，A から F までの文字を追加して使う．16 進数の計算も必要だったのでずいぶんやった．7＋8 というのを見ると F と思ってしまうのである.) メモリーを拡張するため，新発売の 256 バイトメモリー（メガバイトでもキロバイトでもない）を秋葉原で並んで買ったこともよく覚えている．

その後，PC-8001，友人の Apple II などもよく使ったが，いずれも Z80, 6502 などのマシン語でプログラムを書いた．しかし，長いプログラムを 16 進数で手で書くのはだんだん困難になってきた．特に JMP や CALL の呼び出し先は絶対アドレスを指定しなくてはいけないのだが，プログラムを書き直して長さが変わると，これらの呼び出し先アドレスもずれてしまうので，それをきちんと管理するのがとても面倒であった．長さを変えないように無理やり変な書き方をしたりするのだ．これを解決するには，CALL INIT などと人間がわかるような形で書いたプログラムをマシン語の 16 進数コードに変換するプログラム，アセンブラと呼ばれるものがあればよかったのだが，当時そのようなものは入手できなかった．そのため，まず Z80 アセンブラを自分で作ることにした．Z80 のまともな解説書も日本語のものは入手できなかったので，秋葉原で買ってきた英語のマニュアルを頼りにアセンブラを自分で作ることにした．記録媒体はカセットテープである．これを使ってオセロなどのプログラムをいくつか書いて高校生の頃，月刊誌「ASCII」に投稿し，何度も原稿が載った．当時は「ASCII」その他のコンピュータ雑誌では，一般読者の投稿記事が記事のかなりの部分を占めていたのである．この関係で大学に入ってからも ASCII 社でアルバイトをして，ゲームプログラムを書いたり，マニュアルの下請けをしたり，解説書を出版したりしていた．(私が書いたいい加減なゲームを堂々と売っていたのだから今考えるとひどい話である．映像や音楽も含めてちゃんとしたプロが作るようになったのはもう少し後のことだ．エニックスが登場したのがちょうどこの頃である.)

このため長い間，私が数学関係で出版したトータルのページ数より，パソコン関係で出版したトータルのページ数のほうが多い時期が続いていた．これは，私がオックスフォード大学出版会から 800 ページの本を出したことによって逆転できたが，今でも私が数学関係で書いたもののトータルの売り上げ部数より，パソコン関係で書いたもののトータルの売り上げ部数のほうが多く，こちらは一生逆転できないであろう．

3. 東大の頃

また少し時代が戻るが，大学では数学科に行くことに決めていたので東大理 I に入学した．(コンピュータは好きだったがそれを専門や仕事にする気は全くなかった.) 入学直後に，数学の勉強会のサークル，物理学研究会数学パートに入った．1 年上に現在北海道大学の小野薫氏がいて，同学年に現在東京大学の小林俊行氏がいた．そこでいろいろな本の輪講をした．よいサークルだったと思う．アールフォースの複素関数論や，ルーディンの解析の本など，標準的な本から，もっとマニアック

なものまでいろいろやった．このサークルは今でもあるようである．

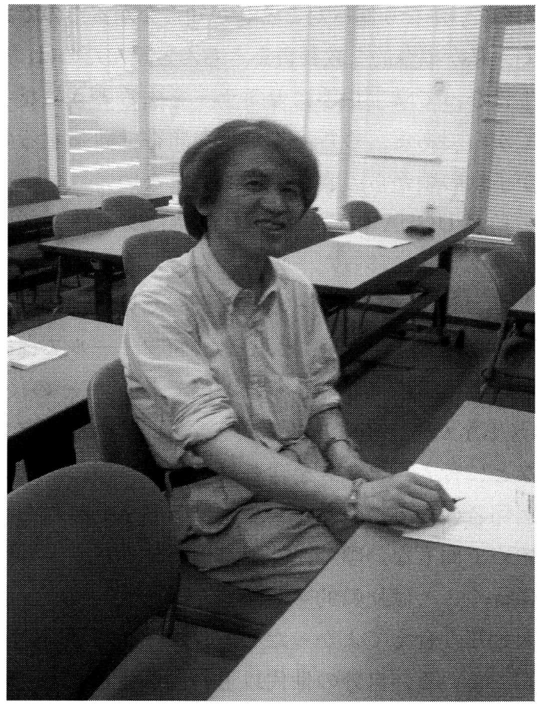
その後当初の予定通り数学科に進学した．物理とどちらにするか迷った，さらには実際に物理学科に行った後数学者になったという話はよくあるが，私は物理に行こうとはほんの少しでも思うことはなかった．それで今数理物理だとか言っているのも不思議な話である．

大学の初めの頃はコンピュータ関係のアルバイトもずいぶんやっていた．ASCII 社ではいくつもマンションを借りており，学生が泊り込みでプログラムや原稿を書いていたのだ．しかしだんだんそういうことからも足を洗って，4年生になるとき，専門を決めてセミナーで勉強することになった．テキストの候補の中に，小松彦三郎先生の挙げた“C^*-algebra extension and K-homology”があった．前に手当たりしだいに読んだ本の中に，C^*-環の本があったことと，荒木不二洋先生がよく「数学セミナー」などに記事を書かれていたこともあって，作用素環がどういうものかは一応知っていた．関数解析とホモロジー代数が面白いと思ったことと，誰も周りでやっていないものをやってみるほうがいいような気がしたので，この本を選んで作用素環を勉強することになった．当時東大で作用素環をやっている人はいなかったが，服部晶夫先生のところの人たちが，Atiyah–Singer の指数定理との関連で作用素環に興味を持っていたことも影響している．現在慶應義塾大学にいる森吉仁志氏もその一人で，私の1年上であった．

結び目のジョーンズ多項式のプレプリントが回ってきたのは私が作用素環を始めた直後である．もちろん当時は Internet も arXiv もなく，郵送されてきたものをみんなでコピーしたのだ．当然のことながら，なぜ作用素環と結び目が関係するのか全くわからなかった．将来これに関係したことが自分の専門になるとはちっとも思っていなかった．

4. 留学時代

4年生のとき，小松先生にアメリカ留学を勧められた．面白い話だと思ったので，カリフォルニア大学ロサンゼルス校（UCLA）の竹崎正道先生のところに留学することになった．実際にアメリカに行ったのは東大で修士に入ってすぐの夏である．他にもセミナーのテキストの著者のダグラスがいたニューヨーク州立大学ストーニーブルック校と，作用素環関係者がいる（しかし現在活躍しているジョーンズとヴォイクレスクはまだいなかった）カリフォルニア大学バークレー校にも願書を出して通ったが UCLA に行くことになった．（なお作用素環の人のいる大学は偏っており，ハーバード，MIT（マサチューセッツ工科大学），プリンストンなどには当時も今も作用素環の人はいない．）



セミナー後の筆者．

もちろん竹崎先生の名前は知っており，岩波から出ていた『作用素環の構造』も持っていたが，私は別の方面の作用素環を最初勉強していたので，現在の専門に近いような種類の作用素環の話題は，かなりあとのほうまでよく知らないままであった．そもそも，日本で普通に作用素環を専門に決めると，最初はじっくり標準的な教科書をセミナーで読むわけだが，私はそんなこともしたことがなかっ

たので，かなり偏ったことしか知らなかったのである．私が標準的な教科書をきちんと読んだのは，先生になって学生相手にセミナーをするようになってからである．めちゃくちゃな順番で勉強するのが子供の頃からの癖なのかもしれない．

私がUCLAに行ったのと同時にジョーンズはバークレーに移った．当時どんどん有名になってきており，バークレーのセミナーで見て，これが有名なジョーンズか，と思った．（フィールズ賞を取るのはさらにこの5年ほど後である．）その後，UCLAから，イギリス，フランス，スウェーデンなどに行き，コンヌを含むヨーロッパの作用素環関係者の大半に会った．当時は円もまだ高くなり始めて間もない頃で，院生ぐらいの日本人が外国に行くことは比較的珍しかったので，いろいろな人と知り合えてよかったと思う．今作用素環論で知っている，自分の世代以上の人はほとんどすべてこの院生時代に知り合ったものである．今でも私の共著者の大半は外国人であり，院生，ポスドク，客員教員などで，積極的に外国人を受け入れているが，それも大学院生の頃からの自然な続きである．

数学に必要な英語の水準はあまり高くない．最初はやはりとまどったが，半年くらいで用が足りる程度に上達し，その後は何年いてもあまり変わらなかったような気がする．アメリカに行く前は，アメリカの大学で何年も暮らしていると，アメリカ人と変わらないようにしゃべれるようになるのだと思っていたが，大きな間違いであった．ただ，そのあまり高くない水準にも達しない日本人学生が結構いるのも事実である．せっかく難しい入学試験を受けて大学に入ってくるのだから，最初から英語の本を読んだり，英語でセミナーをしたりすればいいのではないかと思って，自分が先生になってからいろいろと工夫してみているが，効果がどのくらいあるのかなかなかよくわからないところである．

アメリカ留学時代の経験でもう一つ特徴的なことはティーチングアシスタント（TA）をやっていたことである．日本でも最近はかなりあちこちで導入されているが，当時はまだ日本ではほとんど聞かないものであった．日本では現在でも，演習で学生が発表するのにコメントしたり，質問に答えたり，試験やレポートを採点したりするくらいの仕事が普通だが，アメリカでは新米TAでも黒板の前で教えるのが普通である．アメリカの授業1コースの標準的な形は，毎週50分の授業が3回（例えば月水金）あり，演習は少人数（10人，20人といった単位）に分かれて他の曜日（例えば火木）にTAが問題演習を解説するといったものである．学生の側から見ると，TA担当の演習は（火木などに）たくさんあるものの中から，自分の割り当ての分一つに出ることになる．演習と言っても学生が問題を解くのではなく，TAが黒板の前で解説するので，TAの側から見れば50分話し続けることになる．（学生が問題を解くのは宿題であり，これはTAとは別の担当が毎週採点する．）日本の現在のTAより，仕事も収入も多いと言っていいであろう．経験を積むとTAが普通の授業を丸ごと任されることもよくある．アメリカの大学初年級の数学の授業は日本の高校レベルのものが多いので，数学的なレベルは高くないが，むしろそのほうが教える技術は高いものが必要である．

私は1年目は英語に自信もなく，免除してもらったが，2年目から3年目にかけて何回かこれを担当した．経験を積んだTAが元締めの監督のような担当になっており，教え方についていろいろ指導する．これは教育実習のような役割も担っており，数学では通常院生が必ずやらなければならないものになっている．これも日本でも最近導入されている，ティーチング・エバリュエーション（授業評価）が毎学期末にあり，悪い場合はいろいろと指導が入る．最悪の場合はTAをくびになり，お金がもらえなくなる．私のときは，いつもいい評価の理由は「どの問題を質問しても即答した」，悪い理由は「英語が下手だ」であった．

日本では大学で教えるのには教員免許というものはなく，教え方の訓練が全くないままに大学の先生になってしまうのが今でも普通である．子供の数の減少，学力低下などによって教える技術の

重要性はますます大きくなっており，もっと大学院生に対して教え方を教えたほうがよいと思う．チョークやマイクの使い方，時間の使い方など数学そのものから離れた純粋に技術的なことについても，教えるべきこと，習うべきことはたくさんあるように思う．これらは学会での研究発表にも役立つ技術であろう．

UCLAから帰ってからはずっと日本に勤めている．長期，短期で外国に行くことも多いが，日本で教えているのが標準というのがずっと続いている．アメリカに移ったらどうか，と言われることはときどきあり，その気が全くないわけではないが，たぶん実際にはそうならないような気がしている．

その後，いろいろな人との出会いがあり，共形場理論だとか言って数理物理のほうにシフトして行くのだが，ここであまり専門的な内容を書いてもしかたがないであろう．

5. 飛び級について

さて最後に少し，この機会に考えたことを書いてみたい．子供の頃から大学レベルの数学がわかったというのはそんなに珍しい話ではない．たいていの国では飛び級ができるので，15歳で自分の国で一番の大学に入ったとか言うのはわりとよく聞く話である．そうやってそのまま世界的な大物になる人もいるし，全くものにならない人もいるし，その中間にとても様々なケースがある．また，大学に入って初めて数学を本格的に勉強してその後大活躍しているケースもたくさんある．子供の頃から進んだ数学がわかるということは，数学者になるための必要条件でも十分条件でもない．誰が研究で活躍するかはやってみなければわからないのである．しかしそれでも，日本でも飛び級ができるようにしたほうがよいと私は思う．大学院はともかく，現在の日本の大学入学以前の仕組みでは，大学に入るときに1年飛ばせるというのをごく一部の大学でやっているだけである．日本数学会は飛び級に反対の意見を公表しており，飛び級がかえって害をなすことがあるというのはその通りだと思うが，それでもやってみればよいと思う．日本では，大学入学の資格を入学試験で厳重にチェックしているのだから，年齢無制限で入学試験を受けられることにすればよいだけである．

アメリカでは子育てをしてから40歳くらいで大学院に行ってその後世界的に有名な数学者になったという例もある．15歳の大学院生も40歳の大学院生も同じ教室にいるというほうが優れた仕組みなのではないだろうか．日本の大学（院）は，年齢も経歴も似たような人たちばかりである．それ自体がただちに悪いわけではないが，人間の能力の現れ方は非常に大きな幅があるのだからもっと自由な仕組みにすればよいと思う．飛び級したためにかえって失敗することもある，そんなことをしなくても大成功する人はいる，ということをはっきりさせた上で，そういう自由な仕組みの中のオプションの一つとして，飛び級もできればよいと思うのである．（テレビなどでよく，アメリカで10歳で大学に入った天才少年というのを取り上げていたりする．教育効果を見るのには，今10歳で大学に行っている人ではなく，昔10歳で大学に入って今大人になっている人を見なければならない．うまくいった例も，うまくいかなかった例もあるはずだが，そうそううまくいくものではないと思う．）

アメリカの大学のキーワードの一つにディバーシフィケーション（多様化）というものがある．人種，国籍，経歴，性別，年齢その他でいろいろな人が集まっているほうが大学が活性化する，というのが重要な考え方である．日本の大学には明らかにこのような多様性が不足している．あらゆる面で，多様性を高めていくことがこれからの課題であると思う．

（かわひがし・やすゆき，東京大学大学院数理科学研究科）

特　集（2008 年 11 月号予告）

物理と論理

概念規定と論理構造をとらえ直す

本体 952 円

特　集（2008 年 9 月号）

トポロジカルな弦の世界

広がる新しい幾何学像の探求

本体 952 円

編集後記

今回の特集は如何でしたでしょうか．

特集ラインナップを見ると，ポアンカレは数学から物理学，哲学まで幅広く興味・関心を持っていたことが窺えます．

ポアンカレの時代と比較すると現代の科学はやや細分化しているように感じます．ですが，時代が進めば再び幅広い分野にアンテナを張った第 2，第 3 のポアンカレのような人が増えてくるのではないでしょうか．　(R)

＊　　＊

今回特集したポアンカレは，物理学者のピエール・キュリーと親友だったそうですが，二人に共通することは，手がけた仕事のその先をみることなく世を去ってしまったということです．歴史に“もしも”はないと言いますが，ポアンカレがもう少し長く生きていたら，相対論の大半を手がけていただろうと言われます．7 月に永眠された戸塚洋二先生の“その先”も惜しまれてなりません．　(N)

数　理　科　学　10月号

2008 年 10 月 1 日発行

数　理　科　学　編　集　部　　　　発行人 木　下　敏　孝

TEL. (03) 5474–8816

FAX. (03) 5474–8817

ホームページ　http://www.saiensu.co.jp

ご意見・ご要望は　sk@saiensu.co.jp　まで．

発行所 © 株式会社 サ イ エ ン ス 社　　TEL. (03) 5474–8500 (代表)

〒 151–0051 東京都渋谷区千駄ヶ谷 1–3–25　振替 00170–7–2387　　(03) 5474–8600 (広告部)

印刷・製本　三美印刷株式会社　山岡景仁